INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

Para las carreras:
Licenciatura en Ciencias de la Computación
Licenciatura en Sistemas de la Información
Profesorado en Informática

Facultad de Informática
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

Este cuadernillo ha sido preparado por el equipo de Tutores Docentes del Departamento de Matemática de la FaEA

Contenido

Al estudiante 2

Símbolos matemáticos 3

Prólogo: Un problema … ¡Qué problema! 4

1. Conjuntos numéricos
   - 1.1. Números naturales 7
   - 1.2. Números enteros 8
   - 1.3. Números racionales 12
   - 1.4. Números irracionales 19
   - 1.5. Números reales 20
   - 1.6. Actividades prácticas 27

2. Ecuaciones, fórmulas y modelos matemáticos
   - 2.1. Ecuaciones 33
     - Ecuaciones de primer grado 36
     - Ecuaciones de segundo grado 38
   - 2.2. Fórmulas 40
   - 2.3. Modelización 42
   - 2.4. Actividades prácticas 43

3. Trigonometría
   - 3.1. Medición de ángulos 47
   - 3.2. Sistemas de medición de ángulos 48
   - 3.3. Razones trigonométricas 51
   - 3.4. Actividades prácticas 54

4. Funciones
   - 4.1. Introducción 57
   - 4.2. Definición 58
   - 4.3. Dominio, codominio e imagen 59
   - 4.4. Crecimiento y decrecimiento de funciones 61
   - 4.5. Máximos y mínimos locales y absolutos 63
   - 4.6. Ceros o raíces 64
   - 4.7. Actividades prácticas 64

5. Bibliografía 68

¡Bienvenidos!

Estos apuntes fueron elaborados por el Equipo de Tutores Docentes de la Facultad de Economía y Administración con el objetivo de ayudarte a recuperar y consolidar los conocimientos matemáticos que seguramente adquiriste en el nivel medio, y que son la base para afianzar otros más complejos relacionados con la profesión que elegiste.

Para que podamos alcanzar este propósito es necesario que emprendas esta nueva etapa con **responsabilidad y compromiso**, sabiendo que nada es posible **sin esfuerzo** y que nada es **tan difícil, incomprensible o inalcanzable** como parece, sólo se necesita constancia, paciencia y **horas de estudio**.

Te sugerimos la lectura de cada tema de este cuadernillo previo a la asistencia a las clases correspondientes. En clase se desarrollarán teorías cortas con algunos ejemplos, se trabajará en grupo y se podrán consultar las dudas que hayan tenido en la resolución de los problemas.

Son objetivos de este curso que te habitúes a los tiempos disponibles en la Universidad, que siempre son breves, y que fortalezcas tu capacidad de resolver problemas de la manera más conveniente y en el menor tiempo posible, por lo que esperamos que aproveches los horarios de clase para completar aquellos ejercicios en que hayas tenido inconvenientes y verifiques los resultados que obtuviste, y no para comenzar a resolverlos recién en la clase.

Cada persona tiene su propia modalidad de estudio, de trabajo. Sin embargo te recomendamos que sigas el orden en que están presentados los temas y que trates de resolver la guía de ejercicios de cada uno de ellos. Es posible que aparezcan dificultades, no te desanimes, volvé a intentarlo. Si aún no llegás a la solución, anotá las dudas y buscá ayuda, un profesor o un compañero pueden brindártela. No te desanimes, seguí adelante, todo es posible, sólo hay que intentarlo.

Secretaría Académica Fa.If.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

- $\Leftrightarrow$ se lee “si y sólo si”
- $\forall$ se lee “para todo”
- $\exists$ se lee “existe”
- / se lee “tal que”
- $\Rightarrow$ se lee “implica” o “entonces”
- $\therefore$ se lee “por lo tanto”
- $\subset$ se lee “incluido”
- $\not\subset$ se lee “no incluido”
- $\in$ se lee “pertenece”
- $\notin$ se lee “no pertenece”
- $<$ se lee “menor”
- $>$ se lee “mayor”

PRÓLOGO

UN PROBLEMA …. ¡QUÉ PROBLEMA!

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN

La capacidad de resolver problemas es una habilidad muy apreciada en muchos aspectos de nuestras vidas y en particular, cuando estudiamos matemática. No hay reglas que aseguren el éxito en la solución de problemas, aquí solo se mostrarán algunos principios útiles que propone George Polya en su libro *How to Solve It*, el resto queda librado a tu curiosidad e inventiva ().

1. Comprender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que lo entendés.*¿Qué es lo desconocido?*

¿Cuáles son las cantidades que se mencionan?

¿Cuáles son las condiciones planteadas?

Para muchos problemas, sirve

dibujar un diagrama

Se hace necesario también,

utilizar la notación adecuada

2. Pensar un plan

Es fundamental encontrar una conexión entre la información dada y la desconocida que nos permita encontrar el valor o valores desconocidos.

Las siguientes estrategias pueden ser útiles en la elaboración de un plan:

- Tratar de reconocer algo familiar: Relacionar la situación dada con los conocimientos previos. Observar la incógnita y tratar de recordar un problema más familiar que tenga una incógnita similar.

- Tratar de reconocer patrones: Algunos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón, geométrico, numérico o algebraico que está ocurriendo.

- Usar analogías: Siempre es útil tratar de pensar en un problema similar o relacionado que sea más fácil que el original. Si se puede resolver un problema similar, más simple, podemos encontrar las pistas que se necesitan para resolver el problema original. Por ejemplo, si el problema tiene carácter general primero, puedes empezar por un caso particular.

- Introducir algo adicional: A veces es necesario introducir "una ayuda extra" para hacer una conexión entre lo conocido y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema algebraico la ayuda podría ser una nueva incógnita que se relaciona con la incógnita original.

- Tomar casos: Muchas veces es útil dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada caso. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia para enfrentar un valor absoluto.

- Trabajar hacia atrás: A veces es útil imaginar el problema resuelto y trabajar hacia tras, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Así, revirtiendo los pasos quizá se pueda construir una solución para el problema original.

- Establecer metas secundarias: En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales, para que una vez resueltos se pueda alcanzar así la meta final.

- Razonamientos indirectos: Otras veces es conveniente atacar un problema en forma indirecta. Por ejemplo, si tuviésemos una habitación con solo dos puertas, A y B, y quisiésemos probar que alguien entró por la puerta A, podríamos ir por el método directo y vigilar esa entrada para mostrar que entró por dicha puerta o bien, podríamos probar que alguien entró por la puerta A, mirando la puerta B; si una persona entró en la habitación y no lo hizo por la puerta B, tuvo que hacerlo por la puerta A. En matemática, para probar que una condición es verdad, muchas veces se asume que es falsa y e muestra que las consecuencias derivadas de ello son imposibles.

- Inducción matemática: Muchas veces es posible demostrar leyes generales a partir de casos particulares.

3. Ejecutar el plan

Llevar a cabo el plan consiste en implementar y desarrollar lo previsto en la elaboración del plan.

4. Mirar hacia atrás

Después de encontrar la solución, se revisan los procedimientos para ver si no se han cometido errores y se escribe el resultado. Además, la revisión del proceso puede ayudarnos a descubrir una forma más fácil de resolver el problema.

Veamos un ejemplo…

Una señora compró $\frac{1}{4}$ kg de zanahorias, $\frac{2}{3}$ kg de pollo y $\frac{1}{2}$ kg de papas. El kg de zanahorias cuesta \$ 15.-, el kg de pollo cuesta \$ 90.- y el kg de papas cuesta \$ 20.- ¿Cuántos kilogramos llevó en total?

1. Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita?

¿Cuántos kilogramos llevó en total?

- ¿Cuáles son los datos?

Los datos son las cantidades que acompañan a cada producto.

$\frac{1}{4}$ kg de zanahorias   \$ 15.- el kg de zanahorias

$\frac{2}{3}$ kg de pollo   \$ 90.- el kg de pollo

$\frac{1}{2}$ kg de papas   \$ 20.- el kg de papas

- ¿Cuál es la condición?

La condición es el verbo que acompaña a cada dato.

Compró

Gastó

2. Pensar el plan

Es encontrar la relación entre los datos, la condición y la incógnita.

En este caso, el plan sería:

Sumar los kg que compró y el resultado obtenido es lo que llevó.

No me sirve de mucho saber el precio de producto para responder mi incógnita.

3. Ejecutar el plan

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}+\frac{6}{12}=\frac{3+8+6}{12}=\frac{17}{12}$$

4. Mirar hacia atrás

El resultado es el correcto pero sería más entendible si se expresa el resultado como decimal.

$$\frac{17}{12}\sim 1{,}42$$

Por lo que, la respuesta sería: La señora llevó aproximadamente 1,42 kg.

1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

En esta sección trabajaremos con los distintos conjuntos numéricos con el fin de fortalecer la operatoria y las propiedades que verifican.

Estos contenidos son sumamente importantes pues son la base para avanzar en otros temas por lo que esperamos que en esta Unidad puedas fortalecer tus habilidades y te pedimos que dejes de lado la calculadora.

1.1. NÚMEROS NATURALES

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para contar una determinada cantidad de elementos (existen siete notas musicales, 9 planetas, etc.), para establecer un orden entre ciertas cosas (el tercer mes del año, el cuarto hijo, etc.), para establecer medidas (3,2 cm; 5,7 kg; –4ºC; etc.), etc.

Actividad 1: Escribir los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en las casillas de forma que la suma de los tres números de cada fila, de cada columna, y de las dos diagonales, dé siempre el mismo resultado. A esta distribución se le llama **cuadrado mágico.**

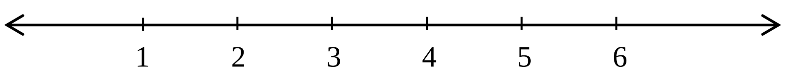
4		**2**
	5	
8		

Podemos afirmar que todos los números que utilizamos para resolver este problema son números naturales.

El conjunto de los números naturales está formado por aquellos que se utilizan para contar. Se los designa con la letra ℕ y se representan:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Es un conjunto que tiene infinitos elementos pues, si bien tiene primer elemento, el 1, que es el menor de todos, no tiene último elemento ya que, es suficiente con sumar 1 a un número para obtener otro mayor. Así, podemos afirmar también que es un conjunto ordenado, por lo que podemos representarlos sobre una recta de la siguiente manera:



Observación:

* Todo número natural n tiene su sucesor $n+1$ y también su antecesor $n-1$, excepto el número 1 que solo tiene sucesor.

Siempre que se sumen dos números naturales se obtendrá otro número natural mientras que muchas veces, no sucede lo mismo si se restan.

¿Es posible encontrar un número que al restárselo a 32 dé por resultado 38?

Si lo traducimos al lenguaje algebraico: $32 - x = 38$, donde x representa al número buscado.

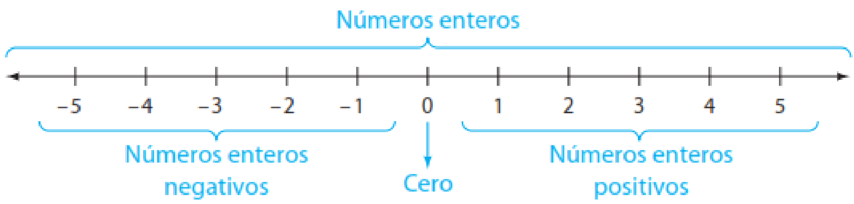
Es imposible encontrar un número natural que cumpla con estas condiciones. Decimos que esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales y lo escribimos así , $S = \emptyset$.

1.2. NÚMEROS ENTEROS

Para encontrar una solución a esta ecuación debemos buscarla en el conjunto de los números enteros, que se simboliza $\mathbb{Z}$ y está formado por los números naturales, el cero y los enteros negativos.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Los números enteros se pueden ubicar en una recta numérica. A la derecha del cero ubicamos los enteros positivos o números naturales y a la izquierda, los números enteros negativos. El cero es el único número entero que no es positivo ni negativo.



Podemos afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

El conjunto de los números enteros es un conjunto infinito que no tiene ni primer ni último elemento, por lo que todo elemento n de este conjunto tiene su siguiente,$n+1$, y su anterior, $n-1$.

Entre dos números enteros a y b hay siempre una cantidad finita de números enteros, esta propiedad se conoce con el nombre de discretitud.

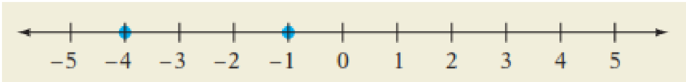
Observaciones:

* La suma de dos números enteros da siempre un número entero.
* La multiplicación de dos números enteros da siempre un número entero.

Relaciones de orden

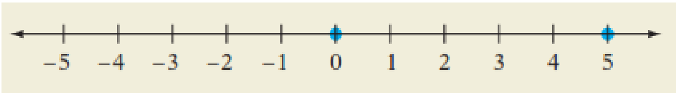
Si a y b representan a dos números cualesquiera y a está a la izquierda de b en la recta numérica, entonces decimos que a **es menor que** b y se expresa $\boldsymbol{a < b}$**.**

Por ejemplo, $-4 < -1$



Si a y b representan a dos números cualesquiera y a está a la derecha de b en la recta numérica, entonces decimos que a **es mayor que** b y se expresa $\boldsymbol{a > b}$**.**

Por ejemplo, $5 > 0$



También hay símbolos para la relación "**es menor o igual que**"($\leq$) y "**es mayor o igual que**"($\geq$).

Por ejemplo,

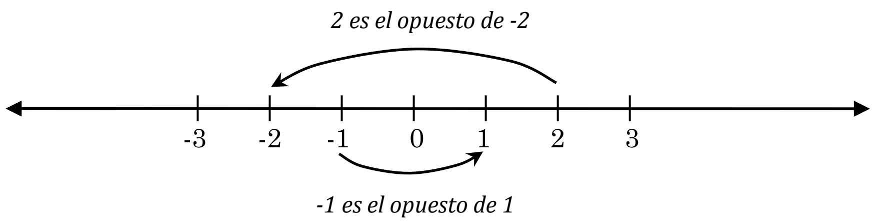
$-12 \leq -5$ (-12 es menor o igual que -5). Esta proposición es verdadera porque $-12 < -5$
$24 \leq 24$ (24 es menor o igual que 24). Esta proposición es verdadera porque $24 = 24$.

Números opuestos

Dado un número a, al número $-a$ se lo llama opuesto de a. Dos números opuestos son aquellos que se encuentran a la misma distancia (en unidades) del cero. Uno positivo y uno negativo, con excepción del cero, cuyo opuesto es él mismo.

Por ejemplo: Si $a = 4$, su opuesto $-a$ es -4

Si $a = -11$, su opuesto $-a$ es $-(-11) = 11$



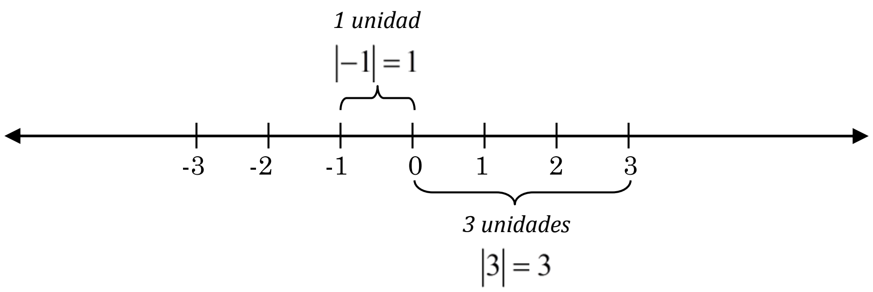
Es por ello que podemos afirmar que los números enteros negativos son en realidad, los opuestos de los números naturales.

Teniendo en cuenta la definición de número opuesto podemos afirmar que restar dos números es lo mismo que, al primero sumarle el opuesto del segundo.

Por ejemplo: $12 - 5 = 12 + (-5)$

Valor absoluto

El valor absoluto o módulo de un número a se define como la distancia de éste al cero. Por lo que, el valor absoluto de un número es siempre un número positivo o cero.

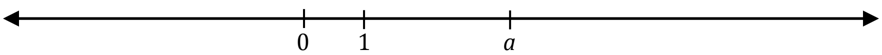


En símbolos, la definición de valor absoluto es $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Dos números opuestos tienen igual distancia al cero, es decir, tienen el mismo valor absoluto, por lo que podemos afirmar que $|a| = |-a|$.

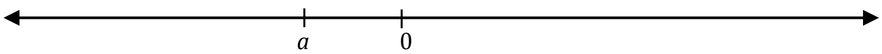
Actividad 2:

a) En la siguiente recta numérica están ubicados 0, 1 y a .



¿Dónde ubicarías los números $a + 1, -a$ y $-a + 1$?

b) En la siguiente recta están ubicados los números 0 y a.



¿Dónde ubicarías al número $-a$?

c) Completar con > o <

$|-105| \ldots . |64|$ $\qquad |-23| \ldots . |-281|$ $\qquad |-23| \ldots . |-1|$ $\qquad |10| \ldots . |-45|$

d) Completar con <, >, ≤, ≥ o =

Si a es un número positivo entonces $|a|$ …. a

Si a es un número negativo entonces $|a|$ …. a

Múltiplos y divisores

📖 Definición: a es **múltiplo** de b si es posible encontrar un número entero k, tal que

$$a = kb, \; con \; a, b, k \in \mathbb{Z}$$

Si a es múltiplo de b, la división de a por b tiene resto cero, por lo que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

* a es múltiplo de b
* b divide a a
* b es factor de a
* a es divisible por b

Por ejemplo: 30 es múltiplo de 5 pues $30 = 6 \cdot 5$, también podemos afirmar que:

5 divide a 30

5 es factor de 30

30 es divisible por 5

¿Podemos afirmar que 6 es múltiplo de 30?

División de números enteros

¿Qué sucede cuando dividimos dos números enteros?

$$4 \div 2 = 2 \;\; \text{pues} \;\; 2 \cdot 2 = 4$$

$$-6 \div 3 = -2 \;\; \text{pues} \;\; 3 \cdot (-2) = -6$$

En general $a \div b = c$, $b \neq 0$ si se verifica que $b \cdot c = a$

Analicemos que sucede en las divisiones que involucran al cero

* ¿A qué es igual $0 \div 1$?

Si $0 \div 1 = \blacktriangle$ entonces $1 \cdot \blacktriangle = 0$

Como solo $1 \cdot 0 = 0$ entonces $\blacktriangle$ debe ser 0.

Este razonamiento es válido para cero dividido cualquier número real distinto de cero.

En general, podemos afirmar que para todo $a \neq 0$

$$0 \div a = 0\,, \text{ pues } a \cdot 0 = 0$$

- Ahora, ¿A que es igual $5 \div 0$?

Si $1 \div 0 = ▲$ entonces $0 \cdot ▲ = 1$

Como cero multiplicado por cualquier número es cero, no hay un valor que pueda reemplazar a ▲para que la proposición sea válida.

En general, podemos afirmar que para todo $a \neq 0$

$a \div 0$ es indefinido o **inteterminado**

- ¿A qué es igual $0 \div 0$?

Si $0 \div 0 = ▲$ entonces $0 \cdot ▲ = 0$

Como el producto de cualquier número y cero es igual a cero, el símbolo ▲ podría reemplazarse por cualquier número real, la solución no sería única.

En este caso, podemos afirmar que

$0 \div 0$ es **indeterminado**

Por ejemplo, $0 \div 2 = 0$ y $2 \div 0$ es indeterminado.

 Pero, ¿cuál será el resultado de dividir a 4 por 3?

Debemos pensar en un número entero tal que al multiplicarlo por 3 dé como resultado 4. ¿Hay algún número entero que cumpla con esta condición?

Para resolver esta situación habrá que introducir otro conjunto numérico, el conjunto de los números racionales al que denotaremos con la letra $\mathbb{Q}$.

1.3. NÚMEROS RACIONALES

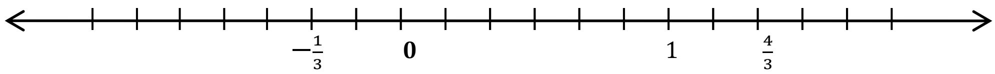
📖 Definición: Un número racional es el cociente (división) de dos números enteros m y n, siendo $n \neq 0$. Por lo tanto: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$, donde m es el numerador y n el denominador. Notemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

De la definición de número racional surge que todo número entero es racional, pues podemos considerar al entero como un racional de denominador 1, o podemos escribirlo como una fracción equivalente.

Por ejemplo: $-3 = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2}$, donde $-3 \in \mathbb{Z}$, $1 \in \mathbb{Z}$, $-6 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}$ y $1 \neq 0$, $2 \neq 0$.

¿Por qué se excluye al 0 del denominador en la definición?

Actividad 3: Representemos en la siguiente recta numérica al $\frac{1}{2}$ y al $-\frac{5}{6}$



Fracciones equivalentes

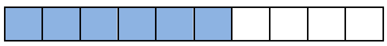
Si consideramos dos números racionales, por ejemplo $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, nos interesa ubicarlos en la recta numérica para establecer el orden entre ellos, o bien podríamos determinar el mayor y el menor sin la necesidad de ubicarlos en la recta. Para ello, nos resulta útil conocer el concepto de fracciones equivalentes.

📖 Definición: Diremos que las fracciones , $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son **fracciones equivalentes**, es decir, representan el mismo número, siempre que sea posible determinar un número k de manera que se verifique que $a \cdot k = c$ y que $b \cdot k = d$.

Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{5}$ de un entero, implica dividir en 5 unidades a nuestro entero y considerar de esas porciones tres.

Gráficamente,

Podríamos pensar que, en lugar de realizar 5 divisiones iguales en nuestro entero, sean diez y considerar de estas diez porciones seis, resultando:



Como podemos observar, la porción representada equivale a la primera, ya que:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \qquad k = 2$$

Si nos interesara saber cuál de los números $\frac{3}{5}$ o $\frac{7}{9}$ es mayor podríamos trabajar con fracciones equivalentes que tengan el mismo numerador o el mismo denominador.

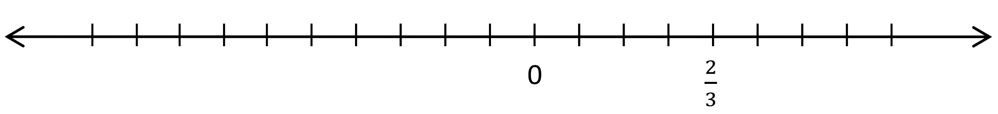
$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{27}{45}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{35}{45}$$

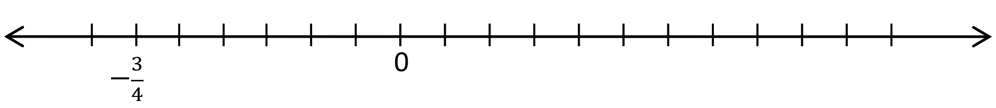
$$\therefore \quad \frac{3}{5} < \frac{35}{45}$$

Actividad 4: En cada caso, ubicar en la recta numérica los números racionales indicados.

a) $-\frac{4}{3}$



b) $\frac{3}{8}$ y 1



Expresiones decimales

Ahora analicemos algunas expresiones decimales:

- 0,3 es la expresión decimal de un número racional porque $0,3 = \frac{3}{10}$ y 3 y 10 son números enteros.
- $0,\hat{5} = 0,555 \ldots.$ es la expresión decimal de un número racional porque $0,\hat{5} = \frac{5}{9}$ y 5 y 9 son números enteros.
- $0,1\hat{5} = 0,1555 \ldots \ldots$ es la expresión decimal de un número racional porque $0,1\hat{5} = \frac{14}{90}$ y 14 y 90 son números enteros.

Estos tres últimos ejemplos muestran los tres tipos diferentes de expresiones decimales que puede tener un número racional:

- Expresión decimal finita: $0,3$; $-0,107$; $12,001$
- Expresión decimal periódica pura: $0,\widehat{23} = 0,2323 \ldots$; $7,\widehat{210} = 7,210210210 \ldots.$
- Expresión decimal periódica mixta: $0,1\hat{5} = 0,1555 \ldots.$; $-5,25\widehat{1743} = -5,2517431743 \ldots..$

> Todo número racional puede escribirse como una expresión decimal cuya parte decimal puede tener un número finito de cifras o puede tener un número infinito de cifras pero periódicas, pura o mixta.

Supongamos que nos dan el número decimal $23,3\hat{5}$. Es una expresión decimal periódica mixta, así que ya sabemos que es un número racional y por lo tanto se tiene que poder expresar como una fracción (cociente de dos enteros). ¿Qué fracción es?

Para hallar esta fracción, existe una regla muy simple que podemos resumir así:

$$\frac{\text{(todas las cifras de la expresión)} - \text{(las cifras no periódicas de la expresión)}}{\text{tantos 9 como cifras decimales periódicas y tantos 0 como cifras decimales no periódicas}}$$

Aplicando esta regla al ejemplo, obtenemos: $23,3\hat{5} = \frac{2335-233}{90} = \frac{2102}{90}$

Y simplificando la fracción obtenemos: $23,3\hat{5} = \frac{1051}{45}$

Otro ejemplo: $32,14\widehat{27} = \frac{321427-321}{9990} = \frac{321106}{9990} = \frac{160553}{4995}$

Observación:

* Siempre podemos verificar si la fracción que obtuvimos es correcta realizando la división y verificando que el resultado coincide con la expresión decimal que teníamos.
* Veremos la justificación de estas reglas al trabajar con ecuaciones.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Antes de comenzar con las operaciones vamos a recordar algunos conceptos.

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números, variables, símbolos de agrupación y operaciones.

Son ejemplos de expresiones algebraicas: $x^2 - 9$, $4x - 3$, $5(8 - 3) + 6$, $\frac{-12+7}{4}$

Cuando una expresión algebraica consta de varias partes, a <u>las partes que se suman</u> se las denomina **términos**.

Por ejemplo, la expresión $2x - 3y - 12$ puede escribirse como $2x + (-3y) + (-12)$ por lo que podemos afirmar que la expresión $\underbrace{2x}\,\underbrace{-3y}\,\underbrace{-12}$ tiene 3 términos: $2x, -3y$ y -12 .

Al multiplicar dos o más expresiones, cada expresión es un **factor** del producto.

Por ejemplo**,** en la expresión $-3 \cdot 8$, -3 y 8 son los factores de ese producto. De manera similar, en la expresión $6ab$ los factores son $6, a$ y b .

Retomemos la expresión $2x - 3y - 12$, observemos que en algunos de los términos hay factores. Por ejemplo, en el término $2x$, el 2 y la x son factores y en el término $3y$, el -3 y la y son factores.

OPERACIONES CON FRACCIONES

Suma de fracciones

Recordemos que la suma de varias fracciones con igual denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

Por ejemplo: $\frac{3}{5} + \frac{13}{5} + \left(-\frac{21}{5}\right) = \frac{3+13-21}{5} = \frac{5}{5} = 1$

Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente.

Por ejemplo: $\frac{3}{7} - 2 + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} - \frac{42}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9-42+5}{21} = -\frac{28}{21}$

Si necesitamos buscar fracciones equivalentes a otras dadas para realizar una suma es aconsejable buscar el **mínimo común múltiplo** ($m.c.m.$) entre los denominadores.

Mínimo común múltiplo

En una fábrica se oye, cada 18 segundos, el golpe de un martillo y cada 24 segundos, el escape de la presión de una válvula. Si se acaban de oír ambos ruidos simultáneamente ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que vuelvan a coincidir?

Para poder calcular el tiempo que transcurrirá hasta oír ambos ruidos a la vez debemos calcular el primer múltiplo común entre 18 y 24.

Los primeros múltiplos positivos de 18 son: 18, 36, 54, **72**, 90, 108, 126, **144**, 162,….

Los primeros múltiplos positivos de 24 son: 24, 48, **72**, 96, 120, **144**, 168,….

Observemos que hay un número infinito de múltiplos de cada uno de ellos y a su vez, hay infinitos múltiplos comunes a ambos: 72, 144, … El menor de ellos es el 72 y es el que llamamos mínimo común múltiplo por ser el menor de los múltiplos comunes y lo indicamos

$$mcm(18{,}24) = 72$$

Otra forma de encontrar el mínimo común múltiplo entre dos números es descomponiéndolos a cada uno de ellos en el producto de sus factores primos y multiplicando todos los factores que sean diferentes y de los factores que sean iguales, multiplicando el que tenga el mayor exponente.

En este ejemplo:

$$18 = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 24 = \pm 1 \cdot 2^3 \cdot 3$$

$$mcm(18{,}24) = \pm 1 \cdot 2^3 \cdot 3^2$$

Actividad 5:

1) Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes números:
   a) 15 y 20 b) 30 y 45 c) 4, 6 y 10 d) 12 y 18
2) Resolver las siguientes sumas algebraicas:
   a) $\frac{7}{30} + \frac{4}{5} - \frac{8}{45}$ b) $\frac{11}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{18} - \frac{9}{10}$

Recordemos que estas expresiones son equivalentes: $-\frac{3}{8} = \frac{-3}{8} = \frac{3}{-8}$

En general, podemos afirmar que

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad , \qquad b \neq 0$$

Producto de números racionales

En general, el producto entre dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $b, d \neq 0$ es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \qquad b, d \neq 0$$

Coloquialmente, la multiplicación de una fracción por una cierta cantidad se lee como “la fracción de esa cantidad”. Por ejemplo, $\frac{3}{4} \cdot 16$ se lee “tres cuartos de 16” o “las tres cuartas partes de 16” y se calcula

$$\frac{3}{4} \cdot 16 = \frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 1} = \frac{48}{4} = 12$$


Es muy útil **simplificar** antes de realizar el producto.

Actividad 6:

a) La región euroasiática-africana ocupa aproximadamente $\frac{3}{5}$ partes de las tierras emergidas. Asia ocupa aproximadamente la mitad de esa región. ¿Qué parte de la superficie terrestre está ocupada por Asia?

b) ¿Cuántos días representan $\frac{4}{15}$ en un mes (30 días)?

¿Qué sucede cuando multiplicamos cualquier fracción por 1?

¿Qué resultado se obtiene al realizar las siguientes multiplicaciones:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \ldots \qquad \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = \ldots \qquad \frac{1}{3} \cdot 3 = \ldots$$

Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, $a, b \neq 0$ se llaman **inversos multiplicativos**.

Actividad 7:

a) Encontrar el inverso multiplicativo de $\frac{4}{9}$ y de $\frac{6}{5}$.

b) ¿El cero tiene inverso multiplicativo? ¿Por qué?