División de fracciones

Retomemos la Actividad 6 a), para calcular que superficie ocupa Asia podríamos dividir a $\frac{3}{5}$ en 2, es decir,

$$\frac{3}{5} \div 2 = \frac{\frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

Así, podríamos concluir que para dividir dos números racionales podemos multiplicar la fracción que está en el numerador por el inverso multiplicativo de la fracción que está en el denominador. En símbolos,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad , b, c, d \neq 0$$

Por ejemplo, ¿cuántas varas de $\frac{3}{4}\, m$ se pueden cortar si se tienen $\frac{13}{2}\, m$ de alambre?

$$\frac{13}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{13}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{13 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{13 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$$

Se podrán cortar 8 varas y sobrarán $\frac{2}{3}\, m$ de alambre.

Actividad 8:

Calcular $\frac{4}{\frac{4}{3}}$, $\frac{\frac{9}{5}}{9}$, $\frac{\frac{3}{4}}{4}$

Porcentajes

Las fracciones o expresiones decimales muchas veces se expresan como **porcentajes**, por ejemplo, 8% quiere decir $\frac{8}{100}$ ó, lo que es lo mismo, 0,08. En general, b% significa "b partes de 100" y es otra manera de escribir $\frac{b}{100}$.

Por ejemplo, el 42% significa $\frac{42}{100}$ entonces $42\% = \frac{42}{100} = 0{,}42$

 La unidad representa el 100% entonces una forma simple de convertir una expresión decimal a porcentaje es multiplicando por 100%.

Por ejemplo: $0{,}75 = 0{,}75 \cdot 1 = 0{,}75 \cdot 100\% = 75\%$.

Los porcentajes se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones de cantidades como población, salarios o precios.

Actividad 9:

a) Si la inflación de un determinado mes es del 3% y un trabajador cobrase $ 18.000 en ese mes ¿cuál debería ser el salario del mes siguiente para compensar la inflación?

b) El precio de una camisa sin IVA es de $650. Si el IVA es del 21% ¿cuál será el precio final de la camisa? Por pagar al contado se hace un descuento del 10% sobre el precio de lista y si paga con tarjeta de crédito se realiza un recargo del 5% ¿cuál será la diferencia, en pesos, de pagar de una u otra forma?

c) Un artículo que costaba inicialmente $ 1500 fue rebajado en diciembre un 12%. En el mes de enero tuvo una segunda rebaja de un 15% y, en febrero, se rebajó otro 10%. ¿Cuál es el precio final después de las tres rebajas? ¿Cuál es el porcentaje total de la rebaja?

$\mathbb{Q}$ es un conjunto denso

Si n es un número entero, $n+1$ es el entero siguiente y no existe otro número entero entre ellos. Pero, a diferencia del conjunto de los números enteros, en $\mathbb{Q}$ no tiene sentido hablar de siguiente ni de anterior. Por ejemplo, si $n = \frac{1}{2}$ no podemos afirmar que $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ sea su sucesor inmediato pues existe el 1 o el $\frac{3}{4}$ que están entre ellos y podríamos seguir encontrando otros números racionales que cumplan con la misma condición.

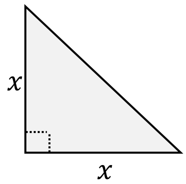
Observemos que entre dos números racionales, a y b , $a < b$, existe el racional $\frac{a+b}{2}$ que verifica: $a < \frac{a+b}{2} < b$

Conclusión: entre dos racionales distintos a y b existen infinitos números racionales.

Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto $\mathbb{Q}$ es un **conjunto denso**, en contraposición a los naturales $\mathbb{N}$ y los enteros $\mathbb{Z}$ que, como ya dijimos, son conjuntos discretos.

1.4. NÚMEROS IRRACIONALES

¿Cuáles son las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si se sabe que su área es 6,5 cm^2?



Como el triángulo es rectángulo isósceles, sus catetos son iguales por lo que el área que es de 6,5 cm^2 queda expresada con la siguiente ecuación:

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot x}{2} = 6{,}5 \iff x^2 = 13$$

Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números racionales, porque no existe ningún número racional que elevado al cuadrado dé por resultado 13.
Aparece entonces un nuevo conjunto numérico, el de los números irracionales que se simboliza con $\mathbb{I}$. Los elementos de este conjunto tienen desarrollo decimal infinito no periódico.

El lado del triángulo anterior mide $\sqrt{13}$ y es un número irracional. Otros números irracionales son:

$6{,}12123123412345\ldots \qquad \pi = 3{,}14159254\ldots$

$-15{,}161718192021\ldots \qquad \sqrt[3]{7}$

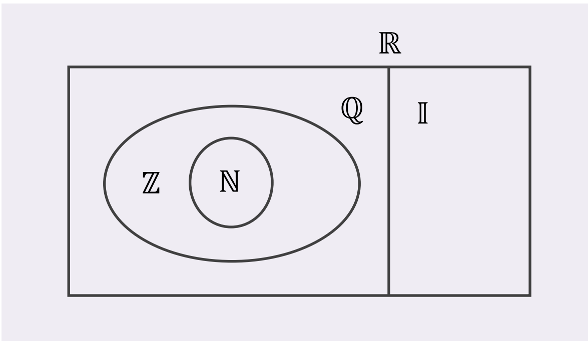
Los tres puntos significan que los dígitos continúan interminablemente, sin que sean periódicos o que esas cifras sean las últimas. A pesar de que no podemos escribir una expresión decimal que sea exactamente igual a $\sqrt{2}$ o a π, podemos dar una aproximación de esos números. El símbolo $\cong$ se lee "aproximadamente igual a".

Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ y redondeada a la milésima más cercana es $\sqrt{2} \cong 1{,}414$.

1.5. NÚMEROS REALES

El conjunto formado por los números racionales y por los irracionales se llama conjunto de los números reales y se simboliza $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

Los números reales tienen la propiedad de llenar por completo la recta numérica, por eso se la llama recta real.

Dado un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponde un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.

Suma y producto en $\mathbb{R}$

Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{R}$ cumplen ciertas propiedades. Veamos algunas de ellas:
Sean a, b y c números reales cualesquiera

Propiedades	de la Suma	del Producto
Ley de cierre	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Existencia de elemento neutro	Es el 0: $a + 0 = 0 + a = a$	Es el 1: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Existencia de inverso	Es el opuesto aditivo: $a + (-a) = (-a) + a = 0$	Es el inverso multiplicativo: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad si \ \ a \neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ y $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Observación: La propiedad asociativa nos permite prescindir del uso de paréntesis y escribir simplemente $a + b + c$ ó $a \cdot b \cdot c$.

Actividad 10: Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas, mencionar las propiedades utilizadas y en caso de ser falsas, explicar claramente por qué.

a) $\frac{1}{3} \cdot (5 + 4) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}$
b) $-2 \cdot \left(\frac{8}{9} - 5\right) = -2 \cdot \frac{8}{9} - 5$
c) $\sqrt{2} + c = c + \sqrt{2}$
d) $3 + [8 \cdot (-9)] = (3 + 8) \cdot [3 + (-9)]$
e) $\frac{1}{a} \cdot a = 1, \forall a \in R$
f) Existe un número real x para el cual $\frac{\sqrt{5}}{\pi} + x = 0$

Potenciación

📖 Si a es un número real y n es un número natural, entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a, es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ veces}$$

Por ejemplo: $a^3 = a \cdot a \cdot a$

Decimos entonces que a^n es una potencia que tiene a como base y n como exponente.

Extendemos la definición para exponentes enteros definiendo, para a ≠ 0

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{-n} = (a^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por ejemplo, a) $abaa = a^3b$ b) $8xxx8yy = 8^2x^3y^2$

Observación: Tenemos que tener cuidado de no confundir una suma con una multiplicación.

$$x + x + x + x + x = 5x \qquad \text{y} \qquad x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

Diferencia entre $-x^2$ y $(x)^2$

Un exponente se aplica solo al número o letra que lo precede en forma directa, a menos que utilicemos paréntesis para indicar otra cosa.

Por ejemplo, si consideramos $7x^3$ solo la x está elevada al cubo.

Veamos la diferencia entre $-x^2$ y $(-x)^2$:

La expresión $-x^2$ se lee *"el opuesto de x al cuadrado"* mientras que $(-x)^2$ se lee *"el cuadrado del opuesto de x"*.

$$-x^2 = -x \cdot x$$

$$(-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2$$

Actividad 11: Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a) $2^8 = 2^2 \cdot 2^6 = 2^5 \cdot 2^3$
b) $(8+3)^2 = 8^2 + 3^2$
c) $(8 \cdot 3)^2 = 8^2 \cdot 3^2$
d) $(2^3)^2 = 2^5$
e) $(2^3)^2 = 2^6$
f) $-3^2 = (-3)^2$
g) $5^4 = 4^5$
h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{3^{-2}}$
i) $5^{-2} = -10$

La actividad anterior ejemplifica algunas de las siguientes propiedades de la potencia:

Sean a, b números reales distintos de 0 y sean m, n números enteros.

Propiedades de la Potencia	
Distributiva con respecto al producto	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Distributiva con respecto a la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^m =$ …………………………
Producto de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} =$ ……………………………
Potencia de potencia	$(a^n)^m =$ …………………………

La potencia no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta.

¿Qué sucede si a un número negativo lo elevamos a una potencia par? ¿Cuál es el signo del resultado?

Radicación

Para los enteros positivos n ya se ha definido la n-ésima potencia de b, a saber, b^n. Ahora vamos a utilizar la ecuación $a = b^n$ para definir la n-ésima raíz de a.
La notación de la raíz cuadrada de 49 es $\sqrt{49}$. Su valor es 7 porque $7^2 = 49$ y $7 > 0$. Aun cuando $(-7)^2 = 49$, el símbolo $\sqrt{49}$ se usa sólo con $+7$ y no con -7, así que se tendrá un solo valor de $\sqrt{49}$. Claro que siempre es posible escribir $-\sqrt{49}$ si se desea el valor negativo -7.

Podemos observar que -49 no tiene una raíz cuadrada real ya que $\mathrm{b}^2 > 0$ para todo número real b, por lo que $b^2 = -49$ no tiene solución en el conjunto de los números reales.

📖 Si a es un número real positivo, $\sqrt{a} = b$ si y sólo si $a = b^2$ y $b > 0$

b recibe el nombre de raíz cuadrada principal de $\boldsymbol{a}$.

Además, $\sqrt{0} = 0$.

Ejemplo: $\sqrt{25} = 5$, pues $5^2 = 25$ (no es -5 ni ± 5)

En el caso de las raíces cúbicas se puede utilizar tanto números positivos como negativos, así como el cero. Por ejemplo, $2^3 = 8$ y $(-5)^3 = -125$

Se puede decir entonces que,

📖 Si a y b son números *reales cualesquiera*, $\sqrt[3]{a} = b$ si y sólo si $a = b^3$
En particular, $\sqrt[3]{0} = 0$

Ejemplos: $\sqrt[3]{343} = 7$ pues $7^3 = 343$
$\sqrt[3]{-1728} = -12$ pues $(-12)^3 = -1728$

Se puede ver que existe una diferencia básica entre las raíces cuadradas y las raíces cúbicas. Las raíces cuadradas están definidas sólo para los números reales positivos y el cero. Las raíces cúbicas están definidas para cualquier número real.
Lo mismo sucede con cualquier entero positivo n: la distinción fundamental surge de si n es par o impar.

- Si n es un entero positivo par y a y b son números **reales positivos** tales que $a = b^n$, entonces existe $\sqrt[n]{a} = b$.

- Si n es un entero positivo impar y a y b son números **reales** tales que $a = b^n$ entonces existe $\sqrt[n]{a} = b$.

- En cualquiera de los dos casos, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Observaciones:

El número a es el radicando, $\sqrt{}$ es el signo radical, n es el índice del radical y $\sqrt[n]{a}$ es la expresión radical o raíz $n-$ ésima de a.

* El símbolo $\sqrt{a}$ se utiliza sólo para representar $\sqrt[2]{a}$.

Potencias de exponente fraccionario

Observemos las siguientes analogías:

$$a^{\frac{6}{3}} = a^2 \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{a^6} = a^2 \qquad\qquad a^{\frac{15}{5}} = a^3 \quad \text{y} \quad \sqrt[5]{a^{15}} = a^3$$

Estos ejemplos nos inducen a adoptar la siguiente definición para el caso de potencias de exponente fraccionario:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}\ , \ \text{donde} \ \ a \in \mathbb{R}^+ \ , \ n \in \mathbb{Z} \ \text{y} \ \ m \in \mathbb{N}$$

¿Cuándo es posible calcular una potencia de exponente fraccionario y base negativa?

Veamos ahora las propiedades de la radicación, las cuales son análogas a las de la potenciación.

Propiedades de la Radicación (a y b números reales y n, m números naturales)*	
Distributiva con respecto al producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Distributiva con respecto a la división	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

(*) Estas propiedades son válidas siempre que los radicales tengan sentido en el conjunto de los números reales.

¿Es posible aplicar la propiedad distributiva de la radicación respecto a la suma o a la resta? Proponer ejemplos.

¿Qué sucede al aplicar la propiedad distributiva al siguiente radical: $\sqrt{(-4) \cdot (-16)}$?

Simplificación de radicales

Actividad 12: Efectuar las siguientes operaciones

a) $\sqrt[4]{2^8}$, $\sqrt{2^4}$ y 2^2 b) $\sqrt[10]{3^{20}}$, $\sqrt{3^4}$ y 3^2 c) $\sqrt{(-2)^6}$ y $(-2)^3$

> Observemos que, en algunos casos se puede dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número sin alterar el resultado. A esta propiedad la llamaremos **simplificación de radicales.**

* Si el índice de la raíz es impar se puede simplificar siempre sin tener en cuenta el signo de la base del radicando. Por ejemplo:

  $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ (dividimos índice y exponente por *5*)

  $\sqrt[7]{\left(\frac{2}{3}\right)^{21}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ (dividimos índice y exponente por *7*)

* Si el índice de la raíz es par, sólo se puede simplificar si la base es positiva, ya que si la base fuera negativa podría presentarse el siguiente caso:

  $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ (dividimos índice y exponente por 4) *y en realidad*, $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2.$

  Vemos que los resultados no coinciden. Por lo tanto:

> Cuando el índice es PAR y el radicando es NEGATIVO, **NO** se puede simplificar.

Notemos que la única diferencia en el resultado es el signo y que las raíces de índice par dan como resultado siempre un número positivo. Podemos entonces escribir: $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$,
Entonces podemos afirmar que:

> Si n es impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$ Si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Actividad 13: Descubrir los errores cometidos en el siguiente desarrollo.

$$\sqrt[4]{2^8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(-2)^8}} + \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} + \left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = 2^2 \cdot \frac{1}{-2} + \sqrt{(-2)(-8)} + \left(-\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= \frac{4}{-2} + \sqrt{16} + \frac{25}{9}$$

$$= -2 + 4 + \frac{25}{9}$$

$$= \frac{43}{9}$$

Racionalización de denominadores

Cuando una expresión fraccionaria tiene indicado en el denominador un radical, resulta ser conveniente modificar tal expresión- sin cambiar su significado-por otra cuyo denominador sea racional. Este proceso recibe el nombre de racionalización del denominador.

Trabajaremos solo algunos casos:

1) **El denominador tiene un radical único**: Multiplicamos numerador y denominador por un radical que tenga:

- igual índice que el que figura en el denominador si el índice de la raíz es 2.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\,\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

- radicando tal que al efectuar el producto de este con el radicando del radical que existe, resulte una expresión (un número) que tenga como exponente un múltiplo del índice (al cual pueda calculársele la raíz en racionales).

Ejemplo:

$$\frac{14}{\sqrt[3]{7}} = \frac{14\cdot\sqrt[3]{7}^2}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7}^2} = \frac{14\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7}^3} = \frac{14\sqrt[3]{49}}{7} = 2\cdot\sqrt[3]{49}$$

2) **El denominador de dos términos con uno o ambos con radicales de igual índice:**

Aplicamos la siguiente propiedad: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.

- Operamos teniendo en cuenta el conjunto numérico al cual pertenecen los números.

Ejemplo:

$$\frac{15}{\sqrt{5}-\sqrt{8}} = \frac{15\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)} = \frac{15\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{5}^2-\sqrt{8}^2} = \frac{15\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{-3} = -5\cdot 15\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)$$

Logaritmación

📖 **Definición**: Sea $\mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}, \mathrm{b} > 0$ y $\mathrm{b} \neq 1$, el logaritmo de a con base b se define como

$$\log_{\mathrm{b}} \mathrm{a} = \mathrm{c} \Leftrightarrow \mathrm{b}^{\mathrm{c}} = \mathrm{a}$$

Observación: $\mathrm{b} > 0$ y $\mathrm{b} \neq 1 \Longrightarrow \mathrm{b}^{\mathrm{c}} > 0 \Longrightarrow \mathrm{a} > 0$

La logaritmación es una operación que nos permite encontrar el exponente de una potencia conociendo la base y el resultado de calcular la potencia.

Por ejemplo ¿A qué número hay que elevar el 2 para obtener el número 16?

Como para obtener el 16 hay que elevar a 2 a la cuarta, decimos que 4 es el logaritmo en base 2 de 16 y se escribe:

$$\log_2 16 = 4$$

Ejemplo: Calcular, en caso de ser posible

$\log_3 81 =$ $\log_5 1 =$ $\log_7(-49) =$ $\log 0{,}01 =$ $\log_4 0 =$ $\log_6 \frac{1}{36} =$

Propiedades

1. $\log_b b = 1$ Ej: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$

2. $\log_b 1 = 0$ Ej: $\log_{\frac{3}{5}} 1 = 0$

3. $b^{\log_b a} = a$ Ej: $9^{\log_9 3} = 3$

4. $\log_b a^c = c \cdot \log_b a$ Ej: $\log_3 81^{250} = 250 \cdot 4 = 1000$

Consecuencia: $\log_b b^c = c$

5. $\log_b a + \log_b c = \log_b(a \cdot c)$ Ej: $\log_{10} 50 + \log_{10} 2$

6. $\log_b a - \log_b c = \log_b \left(\frac{a}{c}\right)$ Ej: $\log_3 75 - \log_3 25$

7. $\log_b a = \frac{\log_{b'} a}{\log_{b'} b}$

1.6. ACTIVIDADES PRÁCTICAS

1) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La suma de dos números naturales es siempre un número natural.

b) La diferencia de dos números naturales es siempre un número natural.

c) El cuadrado de un número racional negativo es un racional positivo.

d) Existen infinitos números racionales comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2}$.

e) El conjunto de los números naturales carece de primer elemento.

2) Un número n está a la derecha del número 8 en la recta numérica. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
a) n es positivo b) n es negativo c) n es 0 d) n puede ser positivo, negativo o 0

3) Un número n está a la izquierda del número 8 en la recta numérica. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
a) n es positivo b) n es negativo c) n es 0 d) n puede ser positivo, negativo o 0

4) ¿La desigualdades $6 \geq 1$ y $1 \leq 6$ expresan la misma relación de orden?

5) Utilizar el símbolo "$\leq$" para reescribir la relación de orden expresada por la desigualdad $-2 \geq 5$.

6) Completar:

a) Si a es un número positivo, entonces $-a$ es un número …………

b) Si a es un número negativo, entonces $-a$ es un número …………

c) El opuesto del valor absoluto de -12 es ……….

d) El valor absoluto del opuesto de 12 es …………

7) ¿196 y 245 son múltiplos de 7? Justificar. ¿Por qué podemos afirmar que la suma de ellos también es múltiplo de 7?

8) Dado un número entero cualquiera: ¿Cuál es su divisor positivo más pequeño? ¿y el más grande?

9) Dado un número natural cualquiera: ¿Cuál es su múltiplo positivo más pequeño? ¿Podés encontrar el más grande?

10) Responder:

a) Si $m = 14$ ¿cómo pueden representarse los números 13,15 y 16 en términos de m?

b) Sea n un número par cualquiera, ¿cuál es el siguiente entero par? ¿Cuál el anterior?

c) Si x representa cualquier entero impar, ¿cuál es el siguiente entero impar? ¿Cuál el anterior?

d) Si x es cualquier entero par, ¿$x + 1$ es un entero par o impar? ¿Y $x - 1$?

e) Si x es cualquier entero, ¿$2x$ es par o impar? ¿Y $2x - 1$? ¿Y $2x + 1$?

11) Sin resolver una ecuación, determinar si 40% de 80 es menor, igual o mayor que 80% de 40.

12) Tres hermanos, Juan, pedro y Luis, reciben una herencia de \$ 800.000. En el testamento queda establecido que Pedro debe recibir el 30% de la herencia, Juan las dos quintas partes de lo que queda y el resto es para Luis. ¿Cuál de los tres hermanos recibe la mayor parte de la herencia?

13) Por trasladar a una persona enferma, la empresa de ambulancias cobra \$ 2250 sin IVA. Sabiendo que el IVA es del 10,5% ¿cuánto deberá pagar el paciente al momento del traslado? Si esa persona tiene Obra Social, solo paga el 40% del precio total. ¿Cuál sería el costo que absorbe la Obra Social?

14) Una zapatería quiere cobrar un recargo del 15% para las compras con tarjeta de crédito pero para que los clientes no se molesten cuando les advierte del recargo decide hacer los siguiente: cambia los precios de toda la mercadería, aumentándolos en un 15% y al momento

de la venta les dice que por pago contado efectivo les hace un 15% de descuento. Si un par de sandalias cuesta en realidad \$ 3800, luego de todos estos cálculos ¿el cliente que paga al contado pagará efectivamente ese precio? Si la mayoría de las ventas son al contado, le conviene al comerciante este método?

15) Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) si $a = -2$ y $b = 0$, entonces $a : b = 0$

b) $(-a) \cdot (-b) = -(a \,.\, b)$

c) el cociente entre un número y su opuesto es igual a -1

d) $a + (-b + c) = a - b + c$

e) el inverso de 2 es $-\frac{1}{2}$.

f) $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ con $b + c \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$

g) $b - [-c \cdot (2 - 1) - 1] = b$

h) $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{b}$ con $a + b \neq 0$ y $b \neq 0$

i) $(b + c) : a = b : a + c$, con $a \neq 0$

j) para todo $a \in \mathbb{R}$, $a : a^{-1} = 1$

k) para todo $a \in \mathbb{R}$, $(a^{-1})^{-1} = a$

l) la ecuación $2x = 1$ tiene solución en $\mathbb{Z}$

16) Calcular:

a) $\dfrac{\frac{2}{7}-\frac{1}{4}}{6-\frac{2}{3}} =$ b) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}} =$ c) $\dfrac{\frac{1}{b}+a}{\frac{a}{b}} =$ d) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{1}{a}}{\frac{b}{a}+\frac{1}{a}} =$

17) Calcular:

a) $(5 + 3)^2 =$ ………. $5^2 + 3^2 =$ ……….

b) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^4 =$ ………. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1^4 =$ ……….

c) $(-2)^3 =$ ………. $3^{-2} =$ ……….

d) $(-2)^{3^2} =$ ………. $\left[(-2)^3\right]^2 =$ ……….

18) Completar con $=$ ó $\neq$ y justificar:

a) -4^2 ______ $(-4)^2$

b) $1 - 2 \cdot \frac{5}{4}$ _____ $(1 - 2) \cdot \frac{5}{4}$

c) $\dfrac{2^3}{4-\frac{1}{2}}$ _____ $2^3 \div \left(4 - \frac{1}{2}\right)$

19) Resolver los siguientes cálculos combinados y expresar la respuesta como una fracción irreducible.

a) $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 - (-2)^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)$

b) $\dfrac{7 \cdot \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)}{\frac{1}{4}-2}$

c) $\dfrac{(-3)\cdot(-3+1)+\frac{4}{5}}{\left(4-\frac{2}{3}\right)\left(4+\frac{2}{3}\right)}$

d) $\dfrac{\left(-\frac{1}{8}-1\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\frac{1}{4}-\left(1-\frac{1}{5}\right)} \div \left(2 - \frac{2}{11}\right)$

20) Resolver aplicando propiedades de la potenciación:

a) $\frac{(3^2 \cdot 2^3)^3}{6^6} =$

b) $a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{-1} \cdot a \cdot a^{-\frac{5}{6}} =$

c) $\left[\frac{2(3b^{-2}d)bd^3}{12b^3d^{-1}}\right]^5 =$

d) $0{,}2^{-\frac{5}{2}} : (5^{-1})^{\frac{3}{4}} =$

21) En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar las propiedades. Indicar cuáles son y corregirlos.

a) $(2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5)^2 = (2^4)^2 = 2^{16}$

b) $(5^2)^4 : (5^{-3})^2 = 5^6 : 5^{-6} = 5^0 = 1$

c) $\frac{7^4 (7^2)^6}{(7^9)^2} = \frac{7^4 \cdot 7^{12}}{7^{18}} = (-7)^2 = 49$

d) $(7 \cdot 2 - 14)^0 + 5^0 = 2$

22) Determinar si han sido resueltos en forma correcta los siguientes ejercicios y justificar:

a) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

b) $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{36} = 6$

c) $\sqrt{(-2) \cdot (-8)} = \sqrt{16} = 4$

d) $\sqrt{9 + 16} = 3 + 4 = 7$

e) $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

f) $\sqrt[3]{-64} : \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{\frac{-64}{-8}} = \sqrt[3]{8} = 2$

23) Expresar como potencia de exponente fraccionario y calcular:

a) $\sqrt[8]{13} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^{-2} =$

b) $\frac{16^{0.25} \cdot \sqrt[3]{2}}{-4} =$

c) $\frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{27}} =$

24) Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones:

a) $\frac{-8}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}} =$

b) $\frac{7}{\sqrt{5^3 \cdot 3^4}}$

c) $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

25) Verificar que se cumple la siguiente igualdad, considerando $a > 0, b > 0$

$$\frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$$

¿Qué ocurre si $a = b$?

26) Calcular, en caso de ser posible:

a) $\log_2 32 =$

b) $\log_3 81 =$

c) $\log_7(-49) =$

d) $\log_3 9 =$

e) $\log_{(-6)} 36 =$

f) $\log_5 1 =$

g) $\log 0.01 =$

h) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} =$

i) $\log_{35} 0 =$

27) Para seguir calculando….un poquito más complicados:

a) $\log_6 \frac{1}{36} =$

e) $\log_{36} 6 =$

b) $\log_{\frac{1}{5}} 125 =$ f) $\log_2 \sqrt{2} =$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 1 =$ g) $\log_{\sqrt{3}} 9 =$

d) $\log_{125} 5 =$ h) $\ln e^2 =$

28) En cada uno de los siguientes incisos, hallen el valor de "r"

a) $\log_r 16 = 2$ d) $\log_2 \frac{1}{8} = r$ g) $\log_{\sqrt{5}} r = 4$

b) $\ln r = 0$ e) $\log r = -3$ h) $\log_{\sqrt{7}} 7 = r$

c) $\log_2 r = 3$ f) $\log_5 1 =$ i) $\log_{(\sqrt{11})} r = 1$

2. ECUACIONES…FÓRMULAS…MODELOS MATEMÁTICOS

En esta sección repasaremos cómo resolver esas ecuaciones, cómo utilizar las fórmulas que ya conocemos y veremos que el álgebra nos permite modelizar situaciones de la vida real mediante ecuaciones.
Para tener éxito en la resolución de ecuaciones es fundamental comprender con claridad las operaciones con los números reales.

En diferentes ámbitos de la vida diaria de algunos profesionales, empresarios o simplemente de alguien que quiere comprar un determinado artículo, se puede encontrar con las siguientes situaciones:

Situación 1: Las empresas A y B producen ambas un total de 20 toneladas de un determinado producto a lo largo de un mes. Sin embargo, la empresa A produce 10 toneladas más que la empresa B en el mismo lapso de tiempo. ¿Cuánto es la producción de cada una de ellas?

Situación 2: Determinar el precio de equilibrio de un bien cuyas funciones de demanda y de oferta están dadas por $D(p) = 25 - 3p$ y $S(\text{p}) = -5 + 2\text{p}$, respectivamente. Calcular, además, la cantidad del bien demandada para dicho precio de equilibrio.

Situación 3: Si una tienda rebaja sus artículos un 24% ¿cuál sería el precio inicial de una prenda cuyo precio rebajado es de 38 pesos?

Situación 4: Un comerciante de verdura compra una cierta cantidad de tomates a 15 pesos el kilo. Se le echan a perder 3 kilos y el resto lo vende a 25 pesos el kilo. ¿Qué cantidad ha comprado si la ganancia obtenida es de 125 pesos?

Situación 5: Un empresario ha comprado un local rectangular por 259.200 pesos. Sabiendo que uno de los lados del local tiene una longitud igual a las tres cuartas partes del otro y que el precio del metro cuadrado es de 600 pesos, ¿Cuáles son las dimensiones del local?

La matemática, que muchos describen como el “lenguaje del universo”, nos otorga la posibilidad de describir, calcular y predecir el comportamiento del mundo que nos rodea para dar respuesta a estas situaciones u otras miles de preguntas que podemos plantearnos al observar nuestro alrededor.

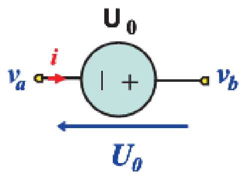
La representación de nuestra realidad, de forma simplificada y de diferentes maneras que nos ayuden a comprender su comportamiento, se realiza a través de modelos.

Un **modelo** es una representación gráfica, esquemática o analítica de una realidad, que sirve para organizar y comunicar de forma clara los elementos que la conforman y sus relaciones.

Los modelos constituyen la base para estudiar y entender problemas propios de muchas áreas: economía, ingeniería, medicina, química, física, psicología, etc.

- Un mapa es un modelo de la superficie de la Tierra.

Un circuito electrónico que describe una fuente de voltaje es un modelo esquemático.



- Las réplicas de aviones, automóviles, barcos, e incluso de muñecos de superhéroes, pero en una escala mucho menor, son modelos de los mismos.

- Maquetas y planos de edificios, centros comerciales, casas o complejos de oficinas son modelos que se usan para ver exactamente como se verá la "estructura real" cuando se construya.

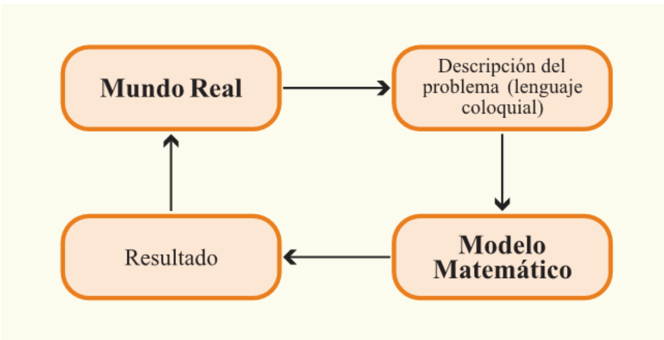
- Un modelo verbal es una narración con palabras que describe un paisaje o una compleja descripción de un negocio (relata y establece el escenario actual de la empresa, las metas y objetivos a seguir, etc.)

En muchas ocasiones, es de gran interés no sólo representar la situación sino el conocimiento de lo que ocurrirá en las mismas cuando las variables involucradas evolucionen. En general, a aquellas representaciones en las que se explicitan las relaciones entre las variables mediante **fórmulas**, **ecuaciones** y uso de números, se las denominan modelos matemáticos.

Un **modelo matemático** es la representación simplificada de la realidad, mediante el uso de funciones que describen su comportamiento, o de ecuaciones que representan sus relaciones.

Ante situaciones concretas como: el espacio recorrido por un móvil, el estiramiento de un resorte al aplicarle una fuerza o el aumento de temperatura de una sustancia al calentarla, entre otras, los científicos analizan cómo se vinculan las variables en juego y buscan fórmulas matemáticas que describan las relaciones que mantienen la misma regularidad. Cuando su relación se caracteriza por una velocidad de cambio constante, estamos en presencia de un modelo lineal.

Esquemáticamente:



2.1. ECUACIONES

🕮 Una **ecuación** es una proposición que muestra la igualdad entre dos expresiones algebraicas, donde una o varias cantidades son desconocidas.

La cantidad desconocida se llama **incógnita**. Cuando el valor desconocido es uno solo, la ecuación se dice con una incógnita. Es común que utilicemos la letra $\boldsymbol{x}$ para simbolizar la cantidad desconocida, aunque podemos usar cualquier letra del alfabeto.

> "Algunos historiadores de la Matemática afirman que la letra x se usó como abreviatura de la palabra árabe *shei* (cosa), para nombrar las incógnitas.
>
> Sin embargo, se considera que la notación algebraica moderna fue inventada en 1637, por el matemático francés René Descartes. En su obra, se representan las constantes con las primeras letras del alfabeto(a, b, c, etc.) y las variables o incógnitas, con las últimas(x, y, z).
>
> Se cuenta que el editor que estaba imprimiendo el libro, debido a la gran cantidad de ecuaciones que tenía, le preguntó a Descartes si podía emplear esas últimas letras para las ecuaciones. Descartes le respondió que le resultaba indiferente qué letras utilizase. El editor eligió utilizar especialmente la x, porque en francés esa letra se utiliza poco." (Matemática 8 EGB3. Editorial Tinta Fresca).

Ejemplos: $2x + 8z = 1$ es una ecuación con dos incógnitas

$3^x + 2 = 4$ es una ecuación con una incógnita

$\frac{1}{4}t + 2 = 2t - 3$ es una ecuación con una incógnita

$\log(2r + 1) = 4$ es una ecuación con una incógnita

Resolver una ecuación significa encontrar **el o los valores** que puede "tomar" la/s incógnita/s de modo tal que la igualdad se verifique.

Al conjunto de valores que hacen que la ecuación se verifique se lo llama **conjunto solución** y puede estar formado por:

- Un solo elemento.

Ejemplo: $2x + 1 = -1$ .Solo tiene solución para $x = -1$ .Escribiremos$S = \{-1\}$.

- Tener un número finito de elementos

Ejemplo: $2x^2 + 2x - 4 = 0$. Solo tiene solución para $x = 1$ y $x = -2$. Escribiremos $S = \{1, -2\}$.

- Tener infinitos elementos.

Ejemplo: $2x = \frac{8}{4}x$, pues todo número real verifica esta igualdad. Escribiremos $S = \mathbb{R}$

- No tener elementos.

Ejemplo: $x^2 = -1$, pues no existe número real que elevado al cuadrado dé -1. Escribiremos $S = \emptyset$

La solución de una ecuación se **comprueba** reemplazando en cada miembro de la ecuación el/los valores que se supone son la solución. Si se llega a una proposición verdadera, la solución es correcta; si da lugar a una proposición falsa, entonces la solución o la comprobación son incorrectas y es necesario regresar para encontrar el error.

Ejemplo: 5 es la solución de la ecuación $x + 5 = 2x$. Para comprobarlo reemplazamos al 5 en cada miembro de la igualdad y vemos si se verifica la igualdad:

Tomo el primer miembro… $5 + 5 = 10$

Tomo el segundo miembro… $2 \cdot 5 = 10$

Como $10 = 10$ es una proposición verdadera entonces puedo afirmar que el conjunto solución es $S = \{5\}$.

Dos ecuaciones se dicen **equivalentes** si poseen el mismo conjunto solución.

Ejemplo: $4x + 2 = -2$ **y** $4x = -4$ son ecuaciones equivalentes pues ambas se verifican, únicamente, para $x = -1$.

Para obtener una ecuación equivalente a una dada, utilizamos las siguientes **propiedades de la igualdad.**

Sean a, b y c tres números reales cualesquiera,

- ✓ **Reflexiva:** $a = a$
- ✓ **Simétrica:** $a = b$ entonces $b = a$
- ✓ **Transitiva:** Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$
- ✓ **Uniforme:**
  - Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
  - Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Con el uso de estas propiedades, al momento de resolver una ecuación, podemos transformarla en otra ecuación equivalente que sea de más fácil resolución.

Nos limitaremos a trabajar con ecuaciones con una incógnita.

Resolución de ecuaciones de primer grado

Se llama ecuación de primer grado a aquella donde la incógnita aparece elevada a la potencia *uno*. También se las llama **ecuaciones lineales.**

Por ejemplo, $\frac{1}{5}x + 1 = -3$ es una ecuación lineal.

Para resolver una ecuación de este tipo se debe obtener, mediante la aplicación de propiedades de la igualdad y operando con los términos, una ecuación equivalente a la dada. Tratando en todos los casos de encontrar el/los valores de la incógnita.

Ejemplos:

1) Sea la ecuación: $3.(x-2)+1 = 2$

Resolución: $3.(x-2)+1 = 2$ (por prop.distributiva)

$3x - 6 + 1 = 2$ (operando)

$3x - 5 = 2$ (por prop. uniforme de la suma, sumamos 5 en cada miembro)

$3x - 5 + 5 = 2 + 5$ (operando)

$3x = 7$ (por prop. uniforme del producto, multiplicamos por $\frac{1}{3}$ en ambos miembros)

$\frac{1}{3}.3x = \frac{1}{3}.7$ (operando)

$x = \frac{7}{3}$

Conjunto solución: $S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$ (Solución unitaria)

Al resolver una ecuación de la forma $ax = b$, con $a \neq 0$, la variable puede despejarse con los siguientes pasos:

* Multiplicar ambos lados de la ecuación por el **inverso multiplicativo o recíproco** de a, que es $\frac{1}{a}$, como se hizo en el ejemplo anterior o,
* Dividir ambos miembros de la ecuación por a.

Se pueden utilizar cualquiera de estos dos métodos para despejar la variable; sin embargo, si la ecuación contiene una o varias fracciones, se llegará con mayor rapidez a la solución multiplicando por el recíproco de a .

2) Sea la ecuación: $-10.x = 5.(6x - 8x)$

Resolución: $-10.x = 5.(6x - 8x)$ (operando)

$-10.x = 5.(-2x)$

$-10.x = -10.x$ (por propiedad uniforme del producto)

$-10.x\left(-\frac{1}{10}\right) = -10.x\left(-\frac{1}{10}\right)$ (operando)

$x = x$

Conjunto solución: $S = \mathbb{R}$ (Solución infinita)

3) Sea la ecuación: $7x - 15 = 7.(2 + x)$

Resolución: $7x - 15 = 7.(2 + x)$ (por propiedad distributiva)

$7x - 15 = 14 + 7x$ (por propiedad uniforme de la suma)

$7x - 15 - 7x = 14 + 7x - 7x$ (operando)

$-15 = 14$ ABSURDO!!!!!!!

Conjunto solución: $S = \varnothing$ (Solución vacía)

Actividad 1:

* Al resolver la ecuación $6 = x - 4$ ¿qué es más conveniente, restar 6 o sumar 4 en ambos miembros de la ecuación para encontrar la solución? Explicar la respuesta.

* ¿$k = -1$ es solución de $-3(k - 3) = -4k + 3 - 5k$? Justificar.

* ¿$p = 0$ es solución de $3p - 4 = 2(p + 3) - 10$? Justificar.

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Se llama ecuación de segundo grado a aquella de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ❶, donde $a \neq 0$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Para resolver una ecuación de segundo grado, en algunos casos, igualamos a cero para llevar a la forma ❶; en otras ocasiones es conveniente omitir este paso.

Ejemplos:

1) Sea la ecuación: $3x^2 = 3$

Resolución: Como la variable aparece en un único término es término es posible "despejar" en forma directa

$3x^2 = 3$ (Por propiedad uniforme del producto)

$x^2 = \frac{3}{3}$ (Operando)

$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$ (Por propiedad de la radicación)

$|x| = 1$

$x = 1$ o $x = -1$ ⇨ Conjunto solución: $S = \{-1; 1\}$

2) Sea la ecuación: $x^2 = -\frac{7}{3}x$

Resolución: $x^2 = -\frac{7}{3}x$

$x^2 + \frac{7}{3}x = 0$ (igualamos a cero)

$x\left(x + \frac{7}{3}\right) = 0$ (sacamos factor común x)

$x = 0$ ó $x + \frac{7}{3} = 0$ (por propiedad de números reales)

$x = 0$ ó $x = -\frac{7}{3}$ ⇨ Conjunto solución: $S = \left\{0; \frac{7}{3}\right\}$

Cuando la ecuación de segundo grado está completa, es decir, tiene los tres términos que aparecen en ❶ podemos aplicar la conocida fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}.$$

El conjunto solución de estas ecuaciones depende de cómo sea la expresión $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, llamada **discriminante.**

- Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ entonces el conjunto solución está formado por un único elemento (un número real).
- Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ entonces el conjunto solución está formado por dos elementos (dos números reales).
- Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ entonces el conjunto solución es vacío. No existe número real que satisfaga la ecuación.

Cuando el conjunto solución es no vacío la fórmula nos da a lo sumo dos soluciones reales: x_1, x_2 y la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se puede reescribir en forma factorizada de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

3) Sea la ecuación: $4x^2 + 8x - 12 = 0$

Resolución: $4x^2 + 8x - 12 = 0$

(como la ecuación es de la forma ❶ estoy en condiciones de resolver utilizando fórmula antes mencionada)

$$a = 4, \quad b = 8, \quad c = -12$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4.4.(-12)}}{2.4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 192}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{-8 \pm 16}{8}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 16}{8} = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-8 - 16}{8} = -3$$

Luego puedo escribir la ecuación: $4.(x - 1).(x - (-3)) = 0$ la que se verifica para $x = 1$ o $x = -3$. Es decir, $S = \{-3;1\}$.

4) Sea la ecuación: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Resolución: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

Luego puedo escribir la ecuación: $(x-2)(x-2) = (x-2)^2 = 0$ la que se verifica para $x = 2$ $S = \{2\}$

5) Sea la ecuación: $x^2 - 2x + 6 = 0$

Resolución: $x^2 - 2x + 6 = 0$

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.6}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-22}}{2}$$

Pero como $b^2 - 4.a.c = -22 < 0$ el conjunto solución es vacío. $S = \varnothing$.

2.2. FÓRMULAS

La mayoría de las ciencias utilizan una gran variedad de fórmulas, veremos cómo evaluar una fórmula y cómo despejar las variables.

Una **fórmula** es una ecuación utilizada para expresar una relación matemática particular, por ejemplo, la fórmula de interés simple es:

$$interés = capital \cdot tasa\ de\ interés \cdot tiempo \quad \text{o bien, } i = p \cdot r \cdot t$$

Para **evaluar** una fórmula, sustituimos los valores numéricos de las variables y realizamos las operaciones indicadas.

Ejemplos:

1) Pedro pide un préstamo de $100.000,00 a pagar en 3 años. El banco cobra una tasa de interés simple del 5% anual por el préstamo. ¿Cuánto deberá devolver al banco en concepto de capital más intereses?

* *Tratar de entender y traducir:*

Como el banco cobra interés simple, la fórmula a usar es $i = p \cdot r \cdot t$.

La tasa de interés es del 5% anual, es decir, $r = \frac{5}{100} = 0{,}05$

El capital p es $ 100.000,00

El tiempo t es 3 años

- *Resolver*: $i = p \cdot r \cdot t$

$$i = 100.000{,}00 \cdot 0{,}05 \cdot 3 = 15.000{,}00$$

- *Revisar*: ¿Es lógica la respuesta? Si el interés es simple y la tasa anual es del 5%, en un año pagará \$ 5000 por lo que es lógico que en tres años pague \$ 15.000.-
- *Respuesta*: Dentro de tres años Pedro deberá devolver al banco \$ 115.000

2) Alicia tiene un velero pequeño y necesita reemplazar una vela triangular que está desgastada. Para comprar la vela necesita especificar las medidas de la base y de la altura de la misma. Mide la base y encuentra que tiene 5 pies. También recuerda que la vela tiene un área de 30 pies cuadrados. Cómo no quiere retirar la vela para medir su altura, emplea el álgebra para encontrar su medida. ¿Cómo habrá hecho?¿Cuál es la altura de la vela?

- *Tratar de entender y traducir:*
  Como la vela tiene forma triangular usamos la fórmula del área de un triángulo:
$$A = \frac{1}{2} b \cdot h$$
- *Calcular:* $30 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$
$$30 = \frac{5}{2} \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5} \cdot 30 = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot h \quad \Leftrightarrow 12 = h$$
- *Revisar:* Es lógico que la altura sea de 12 pies pues tiene que ser mayor que la base.
- *Respuesta:* La vela mide 12 pies de altura.

En este último ejemplo vimos que en la fórmula $A = \frac{1}{2} b \cdot h$, está despejado el área y que en realidad, tanto el área como la base son conocidas y la variable, o valor desconocido, es la altura. Por lo que, también podríamos haber despejado primero h y luego, reemplazamos los valores conocidos y calculamos.

Es decir, si $A = \frac{1}{2} b \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2A}{b} = h$

3) En un cierto año, se registraron en E.E.U.U. 1,2 millones de perros. La raza más popular fue el Labrador, con 172.841 registros. ¿Qué porcentaje de los registros fue dicha raza? Redondear a la décima más cercana.

- *Tratar de entender y traducir*
  La fórmula básica de porcentaje es $Base \cdot porcentaje = cantidad$
  La base es 1.200.000 perros
  172.841 son labradores
  Tengo que averiguar qué porcentaje representan los labradores sobre el total
- *Calcular:* $1.200.000 \cdot P = 172.841$
$$P = \frac{172.841}{1.200.000}$$
$$P \approx 0{,}144$$
$$P \approx 14{,}4\%$$

* *Revisar:* El 10% del total representa 120.000 perros así que parece lógico que 14,4% sea la respuesta.
* *Respuesta:* La raza Labrador representó aproximadamente el 14,4% de los registros.

2.3. MODELIZACIÓN

En el prólogo se presentó un procedimiento para resolver problemas. Ahora nos ocuparemos de aquellos problemas que se pueden traducir en ecuaciones.

Ejemplos:

1) Dada la siguiente situación, determinar cuánto pesa el barril y cuánto el fardo (Extraído de "Solución de problemas a través del descubrimiento. Método de George Polya" Socorro Calleja. Puebla, 2012).

* *Tratar de entender y traducir*: Debemos averiguar cuánto pesan el barril y el fardo y solo sabemos que juntos pesan 135 kg
  Llamaremos x: *barril*
  Sabemos que el fardo pesa 15 kg más que el barril, es decir, $x + 15$
  Sabemos que el barril más el fardo pesan 135 kg, es decir $x + (x + 15) = 135$
* *Calcular*: $x + (x + 15) = 135$

$$2x + 15 = 135$$
$$2x + 15 - 15 = 135 - 15$$
$$2x = 120$$
$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 120$$
$$x = 60$$

El fardo pesa $x + 15$, es decir, 75 kg

* *Respuesta:* El barril pesa 60 kg y el fardo, 75 kg.

2) Una empresa fabrica 1200 pares de zapatillas al mes. Quiere aumentar su producción a razón de 550 pares hasta alcanzar mensualmente los 4500 pares. ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar su meta de producción?

∗ *Tratar de entender y traducir*: La producción actual es de 1200 pares de zapatillas por mes.
Se necesita conocer en cuántos meses (n) podrá alcanzar 4500 pares si aumenta la producción en 550 pares por mes, así $550n = incremento\ de\ la\ producción\ en\ n\ meses$.

∗ *Calcular*:

$$producción\ actual + incremento\ de\ la\ producción\ en\ n\ meses = producción\ futura$$
$$1200 + 550n = 4500$$
$$550n = 3300$$
$$n = \frac{3300}{550}$$
$$n = 6$$

∗ *Respuesta:* En 6 meses se alcanzará la producción deseada de 4500 pares.

Actividad 4: Un problema muy común donde debemos emplear ecuaciones para resolverlo es el siguiente:

Lucía y Esteban han ahorrado dinero durante un año. Lucía tiene en su alcancía la tercera parte del dinero que Esteban ha logrado guardar. Si entre los dos tienen 2400 pesos, ¿cuánto dinero ha ahorrado cada uno de ellos?

Encontrar dos ecuaciones distintas que modelicen este problema.

2.4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS

1) a) La solución de la ecuación $4x - 8 = 2x - (-x) - (-1)$ es:

- un número fraccionario y entero.
- un número entero y negativo.
- 9
- $\frac{9}{7}$
- ...ninguna de éstas.

b) La solución de la ecuación: $5x + 10x - 6 - 9 + 4x = x + 3 - 12$ es:

- 15
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{3}{2}$
- $-\left(\frac{2}{3}\right)$
- ninguna de éstas.

c) El valor de m que pertenece a $\mathbb{N}$ y que es solución de la ecuación

$$m + 3(4m - 6) = -10 + 2(3m - 5) \quad \text{es:}$$

- 0
- inexistente
- $-\left(\frac{2}{7}\right)$
- 2
- ninguna de éstas.

2) Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado y determinar la cantidad de elementos del conjunto solución:

a) $4 + x = \frac{1}{2}(15 + x)$

b) $3(x + 9) = \frac{-5 + 18x}{6}$

c) $5t + 4 - t = 4(1 + t)$

d) $a - x = 3(x - a)$, siendo x la incógnita y a un número real fijo.

e) $(y - 1)(2 + y) = 5 - y(4 - y) - 2y$

f) $\frac{5}{2}a + 2 - \left(\frac{a-4}{3} + a + \frac{1}{6}\right) = 5a - \frac{2}{3}$

g) $y - 2 = 6(x + 4)$, siendo ambas, x e y, incógnitas.

3) Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones e identificar cuáles de ellas son equivalentes:

a) $\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

b) $\left(\frac{5}{6}x + 3\right)^2 = 5x + 8$

c) $-3(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$

d) $3x^2 + 3(3x - 1) = 2(3x + 2x^2) - 13$

e) $w^2 - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2} = 0$

f) $-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{3}{2}x - 5$

4) Resolver las siguientes ecuaciones, escribir el conjunto solución y escribirlas en forma factorizada:

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $-2x^2 + x = 10$

c) $3x^2 - 12x - 63 = 0$

d) $3x^2 = 12x - 12$

5) Responder:

a) ¿Es posible encontrar valores de x que satisfagan $(x + 3)(x - 3) = 5(x + 2) + 31$ y $\frac{3x + 15}{4} = 0$ al mismo tiempo?

b) ¿Es posible encontrar valores de t que satisfagan $8t^2 = -4t$ y $\frac{2t^2 + 2}{3} = \frac{4}{3}t$ a la vez?

6) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) El conjunto solución de la ecuación $\frac{2x^2 - x}{x} = -15$ está dado por {0, –7}.

b) El par $(x, y) = (5, 2)$ es solución de la ecuación $3x^2 - 2y = 51 + 10y$.

c) Las ecuaciones $\frac{(a+3)^2}{a+3} = 0$ y $a + 3 = 0$ son equivalentes.

d) 1 es la única solución de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

7) Responder:

a) El costo total de una cena fue de \$ 970. Esto incluyó una propina del 15% calculada sobre el costo de la cena después de un impuesto sobre las ventas del 6%. Calcular el costo de la cena antes de la propina y del impuesto.

b) Un estudiante respondió correctamente 72 de 80 preguntas en un examen. ¿Qué porcentaje de preguntas respondió correctamente?

c) Un comerciante decide incrementar 10% el precio original de cada artículo que vende. Después del incremento en el precio, el comerciante observa una disminución significativa de las ventas, así que decide reducir 10% el precio actual de cada artículo. ¿Los precios han vuelto a los precios originales? De no ser así, ¿los precios son más altos o más bajos que el precio original?

d) Si una cantidad se incrementa 100% ¿cuántas veces es el nuevo valor de su valor original?

8) Resolver los siguientes problemas:

a) El empleado de una inmobiliaria alquiló dos departamentos y recibió comisiones por un total de \$ 6000,00. La comisión sobre una de los departamentos fue una y media veces la comisión sobre el segundo. ¿Cuál fue la comisión que el empleado cobró sobre cada departamento?

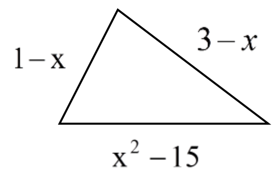
b) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después, la tercera parte del resto y quedan aún 1.600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

c) Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que su producto sea 255.

d) Un poste de luz de 7 m. se rompe y al doblarse, la punta de la sección rota toca el suelo a 3 m. de la base del poste. ¿A qué altura se rompió? (Ayuda: utilizar el Teorema de Pitágoras).

e) Pienso un número, le sumo 5, a este resultado lo multiplico por 3 y el nuevo resultado lo divido por 10. Obtengo así 6. ¿Qué número pensé?

f) El perímetro del siguiente triángulo es 24 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados?



g) Un rectángulo tiene por dimensiones el triple y el quíntuplo del lado de un cuadrado. Calcula las dimensiones de ambos cuadriláteros, sabiendo que la diferencia entre sus áreas es de 2015 cm².

3. TRIGONOMETRÍA

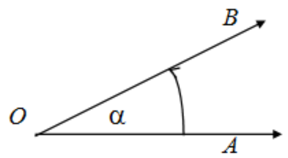
(Este material fue elaborado por las profesoras Claudia Garelik y María Elena Ruiz)

3.1. MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Ángulos dirigidos y orientados

Consideremos en el plano un punto *O* y dos semirrectas con origen en dicho punto.

🕮 Todo ángulo se considera generado por una semirrecta móvil que gira sobre su origen, supuesto fijo. Llamamos ángulo orientado $A\hat{O}B$ al ángulo generado por la rotación, en sentido contrario por las agujas del reloj, de la semirrecta *OA* hacia la posición de la semirrecta *OB*.

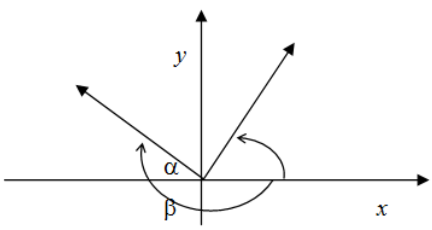


Como observamos en la figura, $\hat{\alpha}$ resulta generado por la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ cuando gira sobre su origen y ocupa la posición final $\overrightarrow{OB}$.

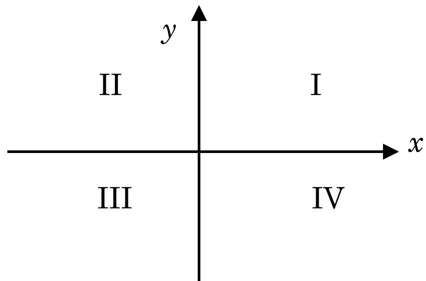
🕮 Un ángulo se define con signo positivo si es generado por una semirrecta móvil que gira en sentido opuesto al movimiento de las agujas de un reloj. En caso contrario, se define como negativo.

Ángulos centrados

🕮 Dado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de centro *O*, llamamos **ángulo centrado** a todo ángulo orientado con vértice en *O*, cuya semirrecta inicial coincida con el semieje positivo de las abscisas.



Observación: los ejes x e y dividen al plano en cuatro cuadrantes.

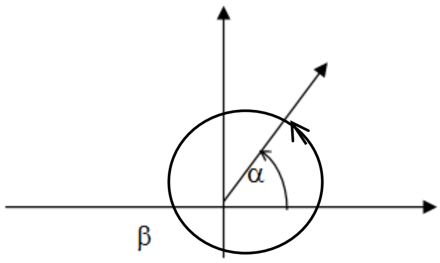


Ángulos congruentes

Cuando coinciden los lados de dos ángulos con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, dichos ángulos son **congruentes**.

Los ángulos α y β son congruentes.

$\hat{\beta} = \hat{\alpha} + 1giro$



Los ángulos congruentes difieren en un número entero de giros:

$$\hat{\beta} \cong \hat{\alpha} \quad \text{si} \quad \hat{\beta} = \hat{\alpha} + k \ \text{giros} \quad , k \in Z$$

3.2. SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Trabajaremos con dos sistemas de medición: sexagesimal y circular o radial.

Sistema Sexagesimal

Su unidad de medida es el **grado sexagesimal (1 º)** que se obtiene si se divide al ángulo recto en 90 partes congruentes:

$$1^{\circ} = \frac{1R}{90}$$ 1 recto = 90 grados ó **1 R = 90°**

Si al grado se lo divide en 60 partes iguales se obtiene el **minuto sexagesimal**:

$$1' = \frac{1^{\circ}}{60}$$ 1 grado = 60 minutos ó **1° = 60'**

Si al minuto se lo divide en 60 partes iguales se obtiene el **segundo sexagesimal**:

$$1'' = \frac{1'}{60}$$ 1 minuto = 60 segundos ó **1' = 60''**

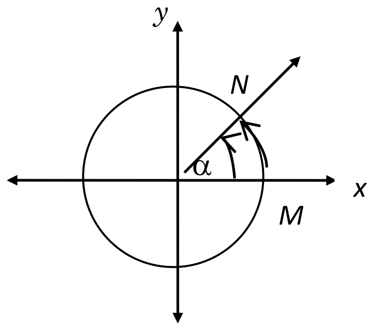
Así, el **ángulo llano** mide 180º y el **ángulo de un giro** mide 360º.

Sistema circular o radial

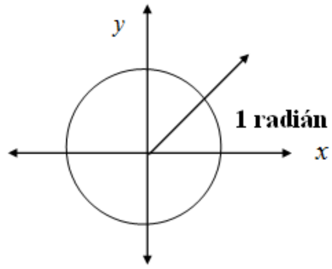
Ahora consideraremos un sistema de ejes coordenados cartesianos, por lo que quedan determinados cuatro ángulos rectos.

Dado que cada uno mide 90°**,** cualquier circunferencia *C*, con centro en el origen del sistema coordenado cartesiano, tiene un ángulo central de 360°.

El ángulo α determina sobre *C* un arco de circunferencia *MN* (tiene el mismo sentido que el ángulo α). Como para cada arco orientado existe un número real que es su longitud, podemos asignar a cada ángulo centrado la longitud del arco que determina, siempre con el signo que corresponda, siendo la longitud de ese arco la medida en radianes del ángulo.



Si tomamos la medida del radio y la transportamos sobre la circunferencia, el ángulo correspondiente a esa longitud de arco igual al radio, recibe el nombre de **radián**; éste es la unidad de medida de otro sistema de medición de ángulos llamado **sistema circular o radial.**



🕮 Por lo tanto, el **radián**, es el ángulo central que corresponde a un arco de circunferencia de igual radio que la misma.

Se demuestra que el radio está contenido 2π veces en la circunferencia y por lo tanto divide al ángulo central de la misma en 2π radianes.