De allí que podemos establecer la siguiente equivalencia entre este sistema y el sistema sexagesimal.

Sist. Radial	**Sist. Sexagesimal**
2π radianes	360°
π rad.	180°
$\frac{\pi}{2}$ rad.	90°
$\frac{\pi}{3}$ rad.	60°
$\frac{\pi}{4}$ rad.	45°
t rad.	x °

Para pasar del sistema sexagesimal al radial el razonamiento es:

180° ______________ π rad.

x ° ______________ t rad. $\Rightarrow$ $t = x° . \dfrac{\pi}{180°}$

Ejemplos:

1. Expresar en radianes un ángulo de 51°20'.

51°20' = 51,33333... °

180° ______________ π rad

51,33333...° ______________ t rad. $\Rightarrow$ $t = 51{,}33333° . \dfrac{\pi}{180°} = 0{,}895935$

51°20' = 0,895935 rad.

2. Expresar en grados sexagesimales un ángulo de 2,5 radianes

$$2{,}5\ rad = \frac{180^0}{\pi\ rad} \cdot 2{,}5\ rad \cong \frac{180^0 \cdot 2{,}5\ rad}{3{,}1416\ rad} \cong \frac{375^0}{2{,}618} = 143^0\ 14'\ 20''$$

Actividad 1: Expresar en radianes cada uno de los siguientes ángulos:

a) $\hat{\alpha} = 60°$ **c)** $\hat{\alpha} = 90°$ **e)** $\hat{\alpha} = 210°$ **g)** $\hat{\alpha} = 57°$
b) $\hat{\alpha} = 45°$ **d)** $\hat{\alpha} = 270°$ **f)** $\hat{\alpha} = 360°$ **h)** $\hat{\alpha} = 133°$

Actividad 2: Expresar en grados, minutos y segundos, cada uno de los siguientes ángulos:

a) $\hat{\beta} = \frac{\pi}{2}\ rad$ **c)** $\hat{\beta} = -\frac{\pi}{6}\ rad$ **e)** $\hat{\beta} = \frac{3}{4}\pi\ rad$

b) $\hat{\beta} = \frac{2}{5}\ rad$ **d)** $\hat{\beta} = -\frac{4}{3}\ rad$ **f)** $\hat{\beta} = -\frac{2}{3}\pi\ rad$

Actividad 3: Expresar en radianes:

a) $\hat{\alpha} = 57°17'44''$ **b)** $\hat{\beta} = 81°20'$ **c)** $\hat{\gamma} = 15°18'10''$

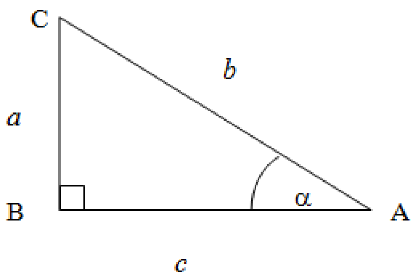
Actividad 4:

a) El minutero de un reloj mide 12 cm. Qué distancia recorre la punta del minutero durante 20 minutos?

b) Un ángulo central determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 30 cm de radio. Expresar el ángulo central en radianes y en grados.

3.3. Razones Trigonométricas

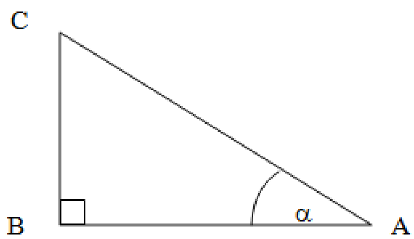
El teorema de Pitágoras relaciona los catetos de un triángulo rectángulo con su hipotenusa de la siguiente manera:



$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \quad \text{ó}$$
$$b^2 = a^2 + c^2$$

Ahora definiremos relaciones que vinculan dos de los lados de un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos.

Construimos, entonces, sobre un ángulo agudo α un triángulo rectángulo ABC



$$\text{seno de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Leftrightarrow sen\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\text{coseno de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos \hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\text{tangente de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow tg\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\text{cotangente de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow ctg\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\text{secante de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow \sec \hat{\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\text{cosecante de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow \cos ec\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Estas razones se denominan **razones trigonométricas** del ángulo α, o también **relaciones trigonométricas.**

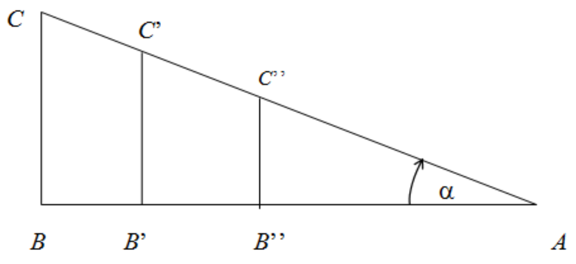
También se puede definir la **relación pitagórica:**

$$sen^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\alpha} = 1$$

La razón trigonométrica es la comparación por cociente de dos magnitudes de la misma especie que da por resultado un **número abstracto.**

- Cabe preguntarse si, en lugar de trazar un único triángulo rectángulo sobre $\hat{\alpha}$ se trazaran más, las razones trigonométricas que se obtendrían serían o no las mismas.

Analicemos lo siguiente:



En $\overset{\Delta}{ABC}$ $\quad sen\ \hat{\alpha} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

En $\overset{\Delta}{AB'C'}$ $\quad sen\ \hat{\alpha} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}}$

En $\overset{\Delta}{AB''C''}$ $\quad sen\ \hat{\alpha} = \dfrac{\overline{B''C''}}{\overline{AC''}}$

Pero como $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AB'C'}, \overset{\Delta}{AB''C''}$ son semejantes, se verifica que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{AC''}}$$

Por lo tanto es indiferente calcular el seno de $\hat{\alpha}$ sobre cualquiera de los triángulos.

Lo mismo es válido para las otras razones trigonométricas.

Una razón trigonométrica cambia de valor si cambia el ángulo sobre el cual se calcula, es decir que las razones trigonométricas dependen del valor del ángulo.

Ejemplo:

$sen\ 35° \cong 0{,}572$

$cos\ 35° \cong 0{,}818$

$tg\ 35° \cong 0{,}700$

Problema inverso: Dado el número trigonométrico, calcular el ángulo.

Ejemplo:

$sen\ \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ \frac{1}{2}$ (se lee: α es el ángulo o arco cuyo seno vale ½)

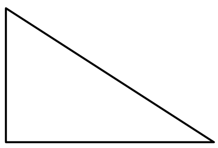
$\alpha = 30°$

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo consiste en calcular los valores de los lados y ángulos desconocidos en función de los que se conocen. Para ello es indispensable conocer dos elementos entre los cuales figure un lado.

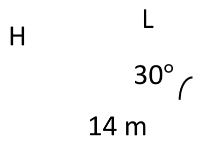
Ejemplo: El techo de un quincho forma un ángulo de 30° con la horizontal. El quincho tiene 14 ms de fondo.

a) ¿Cuál es la longitud del techo?



b) ¿Cuál es la altura que alcanza?

Primero, tratemos de armar el modelo matemático.



Para calcular la longitud del techo podemos utilizar la razón trigonométrica que nos plantea la relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$cos30° = \frac{14m}{L} \;\Rightarrow\; L = \frac{14m}{cos30°} \;\Rightarrow\; L \cong 16{,}16m$$

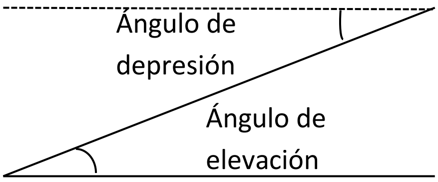
Así, la longitud del techo es de aproximadamente 16,16 m.

Ahora, la longitud del techo se calcula utilizando otra de las razones trigonométricas.

$$tg30° = \frac{H}{14m} \;\Rightarrow H = tg30° \cdot 14m \;\Rightarrow H \cong 8{,}08m$$

Así, la altura que alcanza el quincho es de aproximadamente 8,08m.

Para tener en cuenta: Los ángulos formados con la horizontal se llaman:



Actividad 5: Desde el camino, situado en una línea horizontal a 452 m de la base de un edificio, si miramos hacia el último piso del mismo, el ángulo de elevación es de 32°10′. Calcular la altura del edificio.

3.4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS

1) a) ¿Qué determina que un ángulo orientado tenga sentido positivo? Dar 2 ejemplos.
b) ¿Qué determina que un ángulo orientado tenga sentido negativo? Dar 2 ejemplos.

2) Completar:
Se dice que un ángulo está centrado con respecto un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales si:

- Su vértice ……………………………………………………………………………………..
- La semirrecta inicial………………………………………………………………………..
- El plano cartesiano queda dividido en ………………………………… donde se localizará la semirrecta móvil.

3) Dibujar los siguientes ángulos y determinar en qué cuadrante se encuentran:

$\hat{\alpha} = 30°$ $\qquad\qquad$ $\hat{\beta} = 135°$ $\qquad\qquad$ $\hat{\gamma} = -60°$

$\hat{\delta} = 750°$ $\hat{\theta} = 240°$ $\hat{\varphi} = -225°$

4) a) Completar: Si dos ángulos orientados en un sistema cartesiano tienen sus lados coincidentes se llaman ángulos………………………… La diferencia entre ambos será siempre de …………………………..

b) Dado $\hat{\vartheta} = 30°$, encontrar dos ángulos congruentes con ϑ, uno con sentido positivo y otro, con sentido negativo.

c) Encontrar el ángulo α , $0° \leq \alpha \leq 360°$, que sea congruente con $\hat{\beta} = 1290°$.

5) Encontrar la medida en radianes de los ángulos cuya medida en grados es:

a) $\hat{\alpha} = 150°$ b) $\hat{\beta} = -60°$ c) $\hat{\gamma} = 225°$

d) $\hat{\delta} = 450°$ e) $\hat{\theta} = 54°$

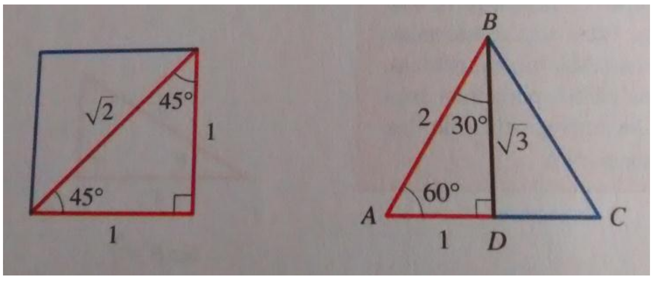
6) Encontrar la medida en grados de los ángulos cuya medida en radianes es:

a) $\hat{\alpha} = \frac{2}{3}\pi$ b) $\hat{\beta} = -\frac{3}{4}\pi$ c) $\hat{\gamma} = \frac{11}{6}\pi$

d) $\hat{\delta} = 5\pi$ e) $\hat{\theta} = \frac{\pi}{9}$

7) Si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, bosquejar un triángulo rectángulo con ángulo agudo α y encontrar $sen\alpha$ y $tg\alpha$.

8) Usar ambos triángulos rectángulos para completar la siguiente tabla:



θ en grados	30°	45°	60°
θ en radianes			
$sen\ \theta$			
$\cos\theta$			
$tg\ \theta$			

9) Con una escalera de 5,8 m de largo necesitamos alcanzar una lámpara que se encuentra en una pared a 4 m de altura.

a) Dibujar el modelo.

b) ¿Cuál es el ángulo de inclinación que le daremos a la escalera?

c) ¿A qué distancia de la pared debemos colocar el pie de la escalera?

10) Calcular la altura de una antena utilizada en un sistema de comunicación sabiendo que su sombra mide 238 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 40° con el suelo.

11) Desde el patio de una casa y a una distancia de 15m de la misma, una persona calculó en 23° el ángulo de elevación hacia el extremo superior de una antena ubicada en el techo de la casa. Luego midió el ángulo de elevación, desde la misma posición anterior, hasta el techo de la casa y resultó de 18°.

a) ¿Cuál es la altura de la antena?

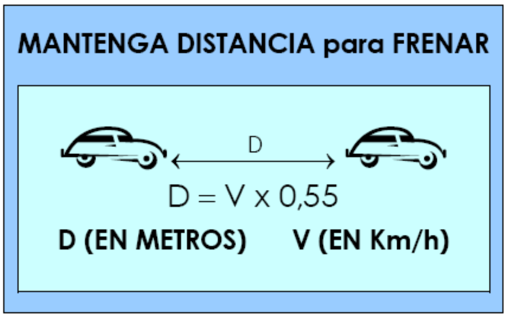
b) ¿Qué distancia hay desde el techo hasta donde el observador realizó las mediciones?

12) Un hombre trata de cruzar nadando un río, en línea recta y en forma perpendicular, desde una orilla hasta la otra. La corriente lo desvía alejándolo 50 m del punto donde quería llegar. Si el ancho del río es de 100 m, ¿con qué ángulo se desvía?

4. FUNCIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

- En diferentes tramos de la multitrocha de la ruta 22 que une las ciudades de Neuquén y Plottier se está evaluando colgar este cartel:



¿Cómo interpretarían la **fórmula**? ¿Qué distancia debe conservar un automovilista que va a 100 km/h?

¿Les parece que los conductores respetarán lo que indica el cartel?

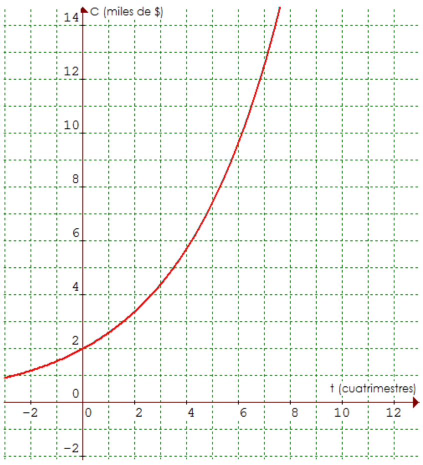
- Una revista especializada informa mediante una **tabla** las distancias de frenado de un automóvil moderno:

Velocidad (km/h)	Distancia de frenado (m)
40	7,30
60	14,80
80	20
100	41
120	60,80

Si analizan esta tabla podrán convencerse por qué a altas velocidades es fundamental respetar el cartel anterior ¿verdad?

- Cambiemos el vértigo de las rutas por el de la economía:

Si invertimos $2.000 en un banco que ofrece una tasa de interés del 7% anual, el modelo que nos permite obtener el capital final en cada tiempo *t* se puede representar mediante este **gráfico**.



Observando el gráfico respondan: ¿cuánto tiempo necesitaremos dejar depositado nuestro dinero para duplicar el capital inicial?

- ¿Cruzamos la cordillera?

Cuando en un terremoto las rocas se fracturan, la energía elástica almacenada en ellas se libera bruscamente.

Los científicos “no pueden vivir” sin manejar “fórmulas extrañas”, fíjense como calculan la energía liberada durante un terremoto utilizando la siguiente fórmula:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot M$$

Siendo, **E** la energía elástica expresada en ergios y **M** la magnitud del terremoto en escala Richter.

El terremoto en Chile en febrero del 2010 fue de una magnitud de 8,8 en escala Richter. Para calcular la energía que se liberó procedemos así:

$\log E = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 8{,}8 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad E = 10^{25}\ ergios$ ¿Mucha energía no?

Gráficos, tablas y fórmulas *son algunas de las maneras de representar* ***funciones****. Dedicaremos esta unidad a descubrir qué son, cuáles son sus características, cómo se clasifican.*

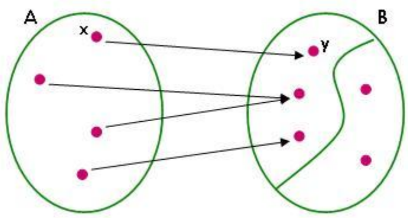
4.2. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Cuando en la introducción analizamos el cartel de la multitrocha habrán descubierto que la distancia que se debe mantener **depende** de la velocidad del vehículo; en el caso de la energía liberada durante un terremoto, la misma **depende** de la magnitud del terremoto en escala Richter. En el primer caso se dice que la distancia está en **función** de la velocidad; en el segundo la energía liberada está en **función** de la magnitud del terremoto.

Podría decirse que una función es algo así como una “ley” que regula la **relación de dependencia** entre cantidades u objetos **variables**.

📖 Una función ***f*** queda definida por:

- ✓ Un conjunto A llamado **dominio**.
- ✓ Un conjunto B llamado **codominio**.
- ✓ Una **ley** que asocia a cada elemento ***x*** del conjunto A un **único** elemento ***y*** del conjunto B.



x es la variable independiente.
y es la variable dependiente.

La función relaciona variables (números u objetos) de manera tal que se **cumplan** dos condiciones:

- ✓ **Existencia** (para cada valor de x **existe** un valor de y)
- ✓ **Unicidad** (a cada valor de x le corresponde un **único** valor de y)

Definición: Decimos que f es una función de un conjunto A en otro conjunto B y escribimos
$f : A \to B \iff \forall x \in A \; \exists \; un \; único \;\; y \in B \, / \, f(x) = y$.

¡No toda relación entre variables es función!

Ejemplos:

1) La relación que a cada argentino le hace corresponder su número de DNI es función, porque a todos y cada uno de los argentinos **(condición de existencia)** le corresponde un único DNI **(condición de unicidad).**

2) No es función la relación mujer – hijo. ¿Por qué?...porque no toda mujer tiene hijos (**condición de existencia)**, y existen mujeres que tienen más de un hijo **(condición de unicidad)**.

3) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

a) La relación "es múltiplo de" establecida de A en B no es función porque no se cumple la condición de unicidad. Por ejemplo al elemento 4 del conjunto A (dominio) le corresponde tres elementos ("1", "2" y "4") del conjunto B (codominio).

b) La relación "es múltiplo impar de" establecida de A en B no es función porque no se cumple ni la condición de unicidad ni la de existencia. Por ejemplo al elemento "2" del conjunto A no le corresponde ningún elemento del conjunto B **(condición de existencia)**; y al elemento "3" del conjunto A le corresponden dos elementos ("1" y "3") del conjunto B **(condición de unicidad).**

4.3. DOMINIO, CODOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

El conjunto de los valores *que puede tomar* la variable independiente se denomina **Dominio** de la función. Y se escribe *Dom (f)* o D_f.

El conjunto que *contiene* a todos los valores que puede tomar la función se denomina **Codominio** de la función.

El conjunto de los valores *que toma* la variable dependiente se denomina **Imagen** de la función. Observen que la imagen *está contenida* en el codominio. Y se escribe *Im(f)* o I_f.

En general, vamos a trabajar con funciones donde el dominio y codominio son conjuntos numéricos.

Dominio de funciones definidas por fórmulas

Analicemos el dominio de las siguientes funciones numéricas:

- $f(x) = 3x - 7$

La fórmula que define a la función f plantea como cálculo operaciones posibles para cualquier valor de la variable independiente x. Por lo tanto $Dom(f) = \mathbb{R}$.

- $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Como la división por 0 no está definida, el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales distintos de 0. Simbólicamente: $Dom\ (g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

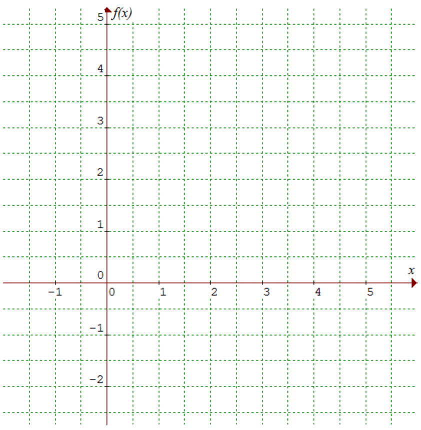
- $h(x) = \sqrt{x+4}$

Sabemos que en el conjunto de los números reales la raíz cuadrada de un número negativo no existe. En consecuencia, para la función h los valores posibles para x serán todos los números reales mayores o iguales a –4. Simbólicamente $Dom(h) = [-4\ ;\ +\infty)$

Tal como lo hicimos en este ejemplo, es muy usual llamar $\boldsymbol{y}$ al valor que le corresponde a $\boldsymbol{x}$ a través de una función. Por este motivo, cuando se define una función a través de su fórmula se usa indistintamente $f(x)$ o y.

Igual fórmula y distinto dominio

Consideremos la función definida por la fórmula $f(x) = \dfrac{1}{2}x$

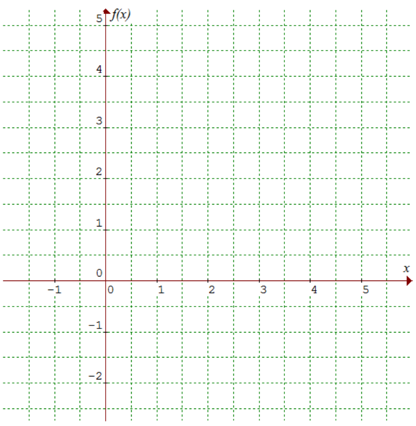


1) Si consideramos que esta fórmula representa el costo neto de producción para una cierta cantidad x de lápices producidos, ¿cómo sería su representación gráfica?

En esta situación particular la función se define sólo para números naturales, ¿por qué?

Consideraremos entonces: $Dom(f) = \mathbb{N}$

Con la ayuda de una tabla construir el gráfico para una producción de hasta 5 lápices.



2) ¿Cuál es el gráfico si consideramos que esta función representa la posición de un objeto que se mueve a velocidad constante durante un cierto período de tiempo?

Definir en términos del problema las variables independiente y dependiente.

¿Cuál es el dominio de f? Construir el gráfico correspondiente.

En los dos casos planteados anteriormente se puede observar que una misma fórmula describe funciones con dominios diferentes.

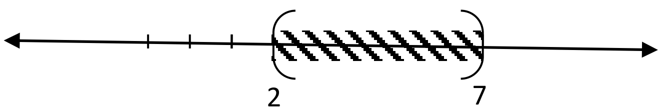
4.4. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES

Conjuntos de números reales: Intervalos

Los intervalos son conjuntos de números reales definidos de la siguiente manera:

- Cerrados
  $[a\,;b] = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; a \leq x \leq b\}$
- Semiabiertos
  $(a\,;\,b] = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; a < x \leq b\}$ $\qquad (-\infty\,;\,b] = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; x \leq b\}$
  $[a\,;\,b) = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; a \leq x < b\}$ $\qquad [a\,;\,+\infty) = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; x \geq a\}$
- Abiertos
  $(a\,;b) = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; a < x < b\}$ $\qquad (a\,;\,+\infty) = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; x > b\}$

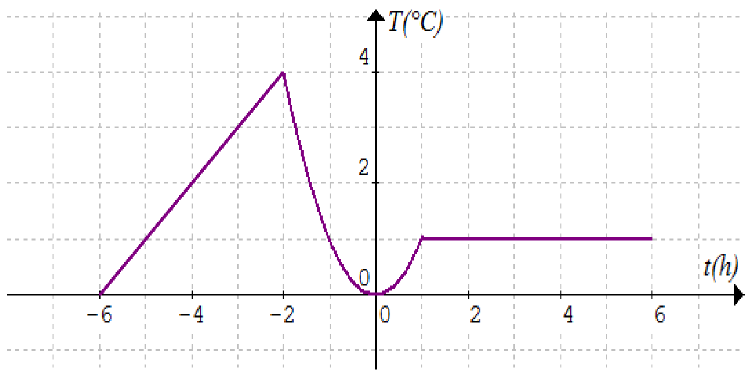
Por ejemplo, $(2\,;7)$ es el conjunto de todos los números reales entre 2 y 7 si lo representamos en la recta numérica:



Crecimiento y decrecimiento de funciones

Para evaluar la temperatura en cada tiempo t (en hs) de una cámara en donde se guardaron semillas de maíz se realizaron registros de la temperatura (en °C) de la misma en forma continua, desde las 6 de la tarde de un día y durante las primeras 6 hs del día siguiente.

Para resolver esta situación se puede considerar el gráfico de la función:



Para los registros de temperatura observamos cuatro situaciones bien diferentes en la evolución de la temperatura a medida que transcurre el tiempo:

- Hasta dos horas antes de la medianoche, es decir $-6 < t < -2$, la temperatura fue aumentando. ¿Cuál fue la máxima temperatura alcanzada?;
- Luego, y hasta la medianoche, $-2 < t < 0$, la temperatura fue disminuyendo. ¿Cuál fue la mínima temperatura alcanzada?;
- Entre la medianoche y la hora 1, es decir $0 < t < 1$, la temperatura volvió a aumentar, hasta llegar a los 1°C;
- A partir de la hora 1 y hasta finalizar la observación, es decir $1 < t < 6$, se registró una temperatura constante. ¿De cuántos grados fue esa temperatura constante?

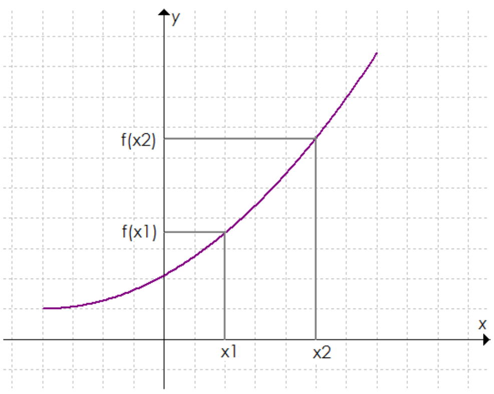
Las anteriores observaciones se traducen en lenguaje matemático de la siguiente forma:

- para $t \in (-6,-2)$, la función es **creciente**,
- para $t \in (-2,0)$, la función es **decreciente**,
- para $t \in (0,1)$, la función es **creciente**,
- para $t \in (1,6)$, la función es **constante**.

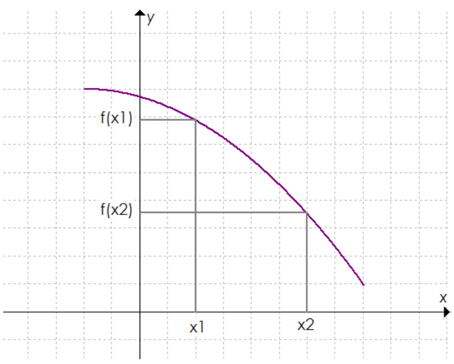
🕮 Definición:

- ✓ Una función f se dice **constante** en un intervalo $I \subseteq Dom(f)$ si $\forall\, x \in I$ es $f(x) = c$ donde c es un número real.
- ✓ Una función f se dice **creciente** en un intervalo $I \subseteq Dom(f)$ si $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ✓ Una función f se dice **decreciente** en un intervalo $I \subseteq Dom(f)$ si $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Gráficamente:



función creciente



función decreciente

Ejemplos:

Siempre son crecientes las funciones que describen situaciones como:

- La altura de una planta a medida que transcurren los días posteriores a la siembra;
- El monto de una inversión, colocada a interés compuesto en un banco, a medida que transcurre el tiempo;
- El perímetro de una circunferencia como función de la medida de su radio.

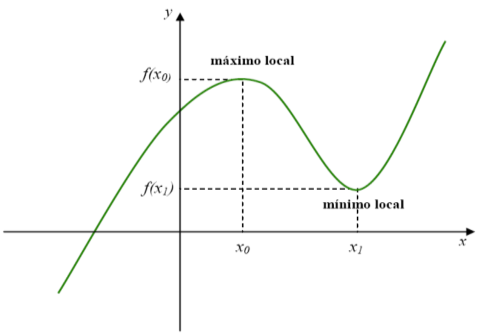
Siempre son decrecientes las funciones que describen situaciones como:

- El interés que debe pagarse por un crédito amortizado según el sistema francés, a medida que transcurre el tiempo.
- El esfuerzo que debe realizarse para levantar un peso mediante el uso de una palanca cada vez que se amplía un brazo de la misma.

4.5. MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES Y ABSOLUTOS

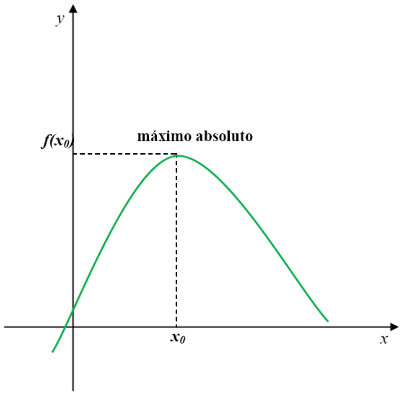
Máximos y mínimos locales (o relativos)

- 🕮 ***f*** alcanza un **máximo local** en x_0 si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos "próximos" a x_0, es decir, si $f(x_0) \geq f(x)$ para los valores de x "cercanos a x_0"
- 🕮 ***f*** alcanza un **mínimo local** en x_1 si $f(x_1)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos "próximos" a x_1, es decir, si $f(x_1) \leq f(x)$ para los valores de x "cercanos a x_1".

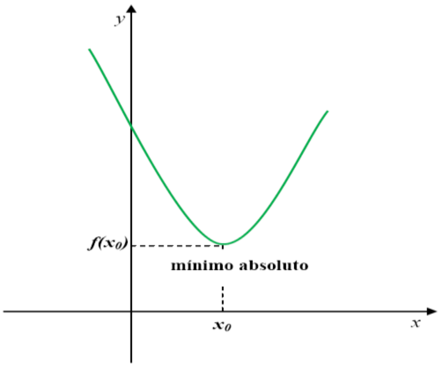


Máximos y mínimos absolutos

- 🕮 ***f*** alcanza un **máximo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio, es decir, si $f(x_0) \geq f(x)$ para cualquier x del dominio de f

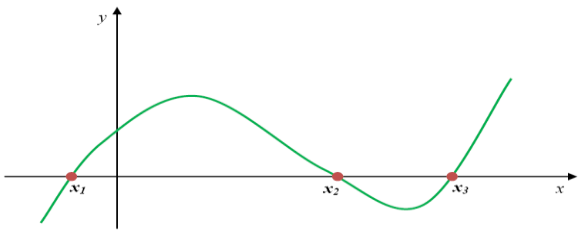


📖 ***f*** alcanza un **mínimo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio, es decir, si $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier x del dominio de f



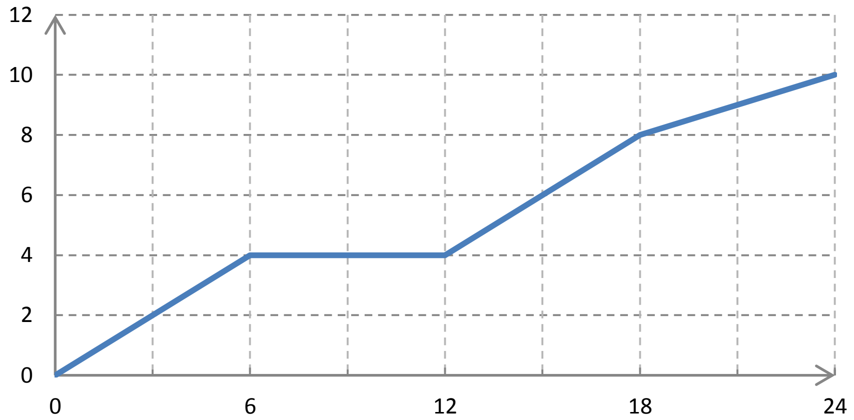
4.6. CEROS O RAÍCES

📖 $x_0 \in Dom(f)$ es raíz de f si y solamente si $f(x_0) = 0$



4.7. ACTIVIDADES PRÁCTICAS

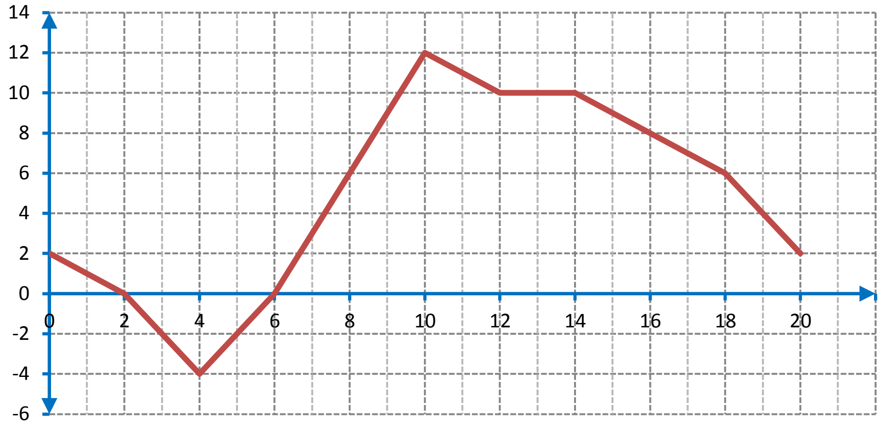
1) Carolina y Sabrina trabajan en la misma empresa. Carolina tiene auto y suele pasar a buscar a Sabrina para ir juntas a trabajar. Observen el gráfico que muestra cómo varía la distancia recorrida por Carolina desde que sale a su casa hasta que llega a la empresa, y contesten a las preguntas.



a) ¿Qué variable se mide en cada eje de coordenadas?
b) ¿Cuánto tarda en llegar a la casa de Sabrina?

c) ¿A qué distancia de la casa de Carolina se encuentra la casa de Sabrina?
d) ¿Cuánto tiempo la espera?
e) En que parte del trayecto van más rápido porque utilizan la autopista. ¿Qué parte de la gráfica es la que corresponde a ese tramo?
f) ¿A qué distancia se encuentra la empresa de la casa de Sabrina?

2) El siguiente gráfico refleja el relevamiento de datos obtenidos en el centro meteorológico de la ciudad de Cipolletti, hora a hora, desde las 0 a las 20 hs de un día.



Si llamamos *f* a la función que relaciona las variables involucradas en el problema. Responder:

a) ¿Qué variables se tuvieron en cuenta para confeccionar el gráfico de *f*? (Identificar variable independiente y variable dependiente).

b) ¿Cuál es el dominio de f? ¿Cuál es la imagen?

c) ¿Cuál es el valor de $f(2)$? ¿y de $f(8)$?

d) ¿En qué horarios la temperatura fue de 10ºC?

e) ¿Cuáles son las temperaturas máxima y mínima y a qué hora se alcanzan esos valores?

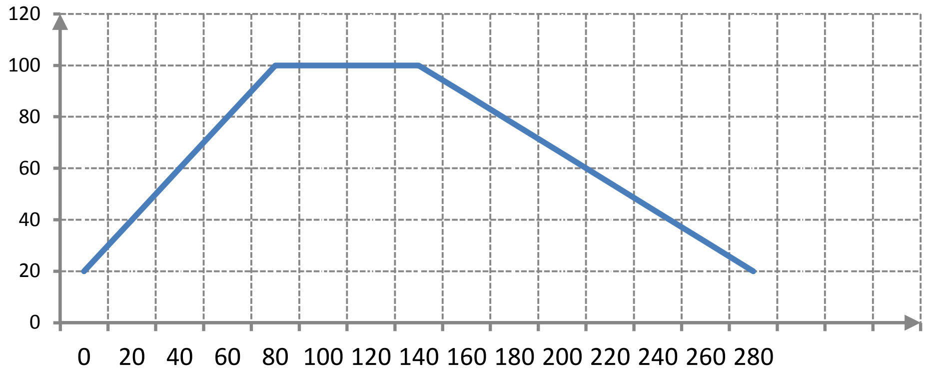
f) ¿Desde qué hora y hasta qué hora se produjo un aumento de la temperatura?

g) ¿En qué intervalos de tiempo se produjo un descenso de la temperatura?

h) ¿Qué ocurrió entre las 15 hs y las 17 hs?

i) ¿En qué mes te parece que pueden haber sido realizadas las mediciones?

3) Se ha calentado una olla con agua. Cuando empieza e hervir (a 100°C), se deja enfriar. Observar el gráfico y responder:



a) ¿Qué variables se han representado en los ejes?

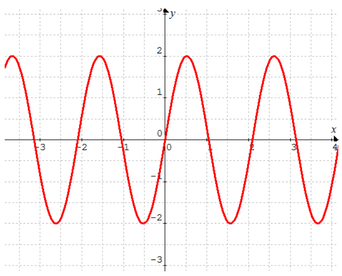
b) ¿Qué representa cada unidad en el eje horizontal? ¿Y en el eje vertical?

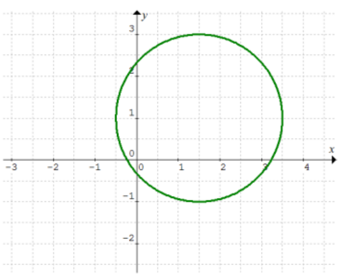
c) ¿Cuál era la temperatura inicial del agua?

d) ¿Cuánto tiempo permanece el agua a 100°C?

e) ¿Cuánto tiempo tarda en enfriarse hasta llegar a los a 20°C?

4) Indicar si los siguientes gráficos corresponden a funciones. Justificar las respuestas.





5) Cada una de las siguientes tablas se corresponde con una de las fórmulas de la lista. Establecer esa correspondencia.

a)

x	0	1	2	3	4
y	1	4	13	28	49

b)

x	0	1	2	3	4
y	1	4	7	10	13

c)

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

i) $y = x + 1$

ii) $y = 3x + 1$

iii) $y = x^3 + 5$

iv) $y = x^3 + 1$

v) $y = 3x^2 + 1$

6) Si definimos la función a partir de la fórmula $g(r) = r + \frac{1}{r}$, determinar el valor de:

a) $g(1)$

c) $g(-0,1)$

b) $g(2)$ d) ¿Es posible encontrar $g(0)$? ¿Por qué?

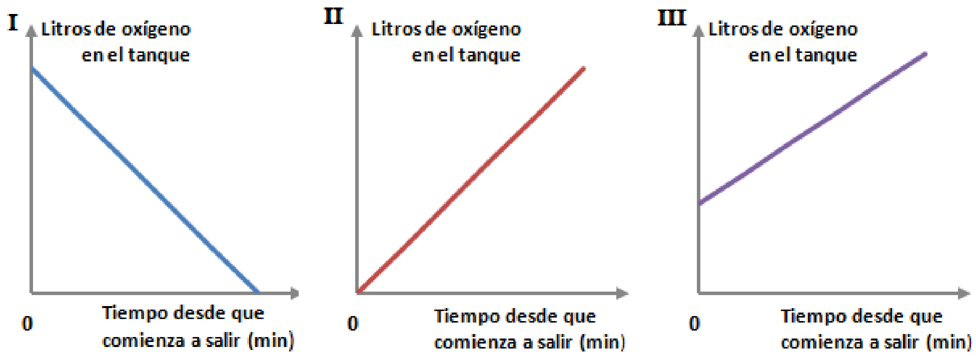
7) Indicar para cada una de las siguientes funciones cuál es su dominio. Calcular cuando sea posible $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ y $f(4)$.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(x) = 3x + 4$ $\quad f(x) = 2x + \sqrt{x}$ $\quad f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

$f(x) = \log(1 - x)$ $\quad f(x) = (x+1)^2 + 2$ $\quad f(x) = -2$ $\quad f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

8) Un tubo de oxígeno de 682 litros de capacidad, que originalmente estaba lleno, se está vaciando a razón de10 litros por minuto.

a) ¿Cuál de estos gráficos podría representar la cantidad de oxígeno que queda en el tubo a medida que transcurre el tiempo? ¿Cómo te das cuenta?



a) ¿Qué podrías hacer para saber cuánto tiempo pasará hasta que el tubo tenga la mitad del contenido original?

5. BIBLIOGRAFÍA

* Abdala, C., Real, M., Turano, C. Carpeta de matemática. Editorial Aique. 2003.
* Altman, S., Comparatore, C., Kurzrok, L. “Matemática: Funciones 1”. Ed. Longseller, 2005.
* Altman, S., Comparatore, C., Kurzrok, L. “Matemática: Funciones 2”. Ed. Longseller, 2005.
* Angel, Allen. “Algebra Elemental”. Pearson Educación, 2007.
* Aufmann, R., Lockwood, J. “Algebra elemental”. Cengage learning, 2013.
* Bocco, Mónica. “Funciones elementales para construir modelos matemáticos”. Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2010.
* Carnelli, G., Novembre, A., Vilariño, A. “Función de gala”. Ed. El Hacedor, 1999.
* Colera, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., Oliveira, Ma. J. “Matemáticas 2”, Ed. Anaya, 1997.
* Colera, J., García, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., Oliveira, Ma. J. “Matemáticas 3”. Ed. Anaya, 1995.
* Colera, J., García, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., Oliveira, Ma. J. “Matemáticas 4”. Ed. Anaya, 1995.
* De Guzmán, M., Colera, J., Salvador, A.. “Bachillerato 2”. Ed. Anaya, 1987.
* De Guzmán, M., Colera, J., Salvador, A.. “Bachillerato 3”. Ed. Anaya, 1988.
* Ferraris, L., march, M. “Una puerta abierta a la Matemática: Trigonometría”. Comunic.Arte, 2008.
* Itzcovich, H., Novembre, A. “M1 matemática”. Ed. Tinta Fresca, 2006.
* Itzcovich, H., Novembre, A. “M2 matemática”. Ed. Tinta Fresca, 2006.
* Martínez, M, Rodríguez, M. “Matemática”. Editorial Mc Graw Hill. 2004.
* Martinez, M., Garelik, C., Ruiz, M., Bernardi, C., Perini, A. “Algunas nociones y aplicaciones de CALCULO”. Editorial de la Universidad Nacional del Comahue. 2008.

Página de Internet

* http://uncomat.uncoma.edu.ar/