INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

Para las carreras:
Licenciatura en Ciencias de la Computación
Licenciatura en Sistemas de la Información
Profesorado en Informática

Facultad de Informática
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

Este cuadernillo ha sido preparado por el equipo de Tutores Docentes del Departamento de Matemática de la FaEA

Contenido

¡Bienvenidos!

Estos apuntes fueron elaborados por el Equipo de Tutores Docentes de la Facultad de Economía y Administración con el objetivo de ayudarte a recuperar y consolidar los conocimientos matemáticos que seguramente adquiriste en el nivel medio, y que son la base para afianzar otros más complejos relacionados con la profesión que elegiste.

Para que podamos alcanzar este propósito es necesario que emprendas esta nueva etapa con **responsabilidad y compromiso**, sabiendo que nada es posible **sin esfuerzo** y que nada es **tan difícil, incomprensible o inalcanzable** como parece, sólo se necesita constancia, paciencia y **horas de estudio**.

Te sugerimos la lectura de cada tema de este cuadernillo previo a la asistencia a las clases correspondientes. En clase se desarrollarán teorías cortas con algunos ejemplos, se trabajará en grupo y se podrán consultar las dudas que hayan tenido en la resolución de los problemas.

Son objetivos de este curso que te habitúes a los tiempos disponibles en la Universidad, que siempre son breves, y que fortalezcas tu capacidad de resolver problemas de la manera más conveniente y en el menor tiempo posible, por lo que esperamos que aproveches los horarios de clase para completar aquellos ejercicios en que hayas tenido inconvenientes y verifiques los resultados que obtuviste, y no para comenzar a resolverlos recién en la clase.

Cada persona tiene su propia modalidad de estudio, de trabajo. Sin embargo te recomendamos que sigas el orden en que están presentados los temas y que trates de resolver la guía de ejercicios de cada uno de ellos. Es posible que aparezcan dificultades, no te desanimes, volvé a intentarlo. Si aún no llegás a la solución, anotá las dudas y buscá ayuda, un profesor o un compañero pueden brindártela. No te desanimes, seguí adelante, todo es posible, sólo hay que intentarlo.

Secretaría Académica Fa.If.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

- $\Leftrightarrow$ se lee "si y sólo si"
- $\forall$ se lee "para todo"
- $\exists$ se lee "existe"
- / se lee "tal que"
- $\Rightarrow$ se lee "implica" o "entonces"
- $\therefore$ se lee "por lo tanto"
- $\subset$ se lee "incluido"
- $\not\subset$ se lee "no incluido"
- $\in$ se lee "pertenece"
- $\notin$ se lee "no pertenece"
- $<$ se lee "menor"
- $>$ se lee "mayor"

PRÓLOGO

UN PROBLEMA …. ¡QUÉ PROBLEMA!

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN

La capacidad de resolver problemas es una habilidad muy apreciada en muchos aspectos de nuestras vidas y en particular, cuando estudiamos matemática. No hay reglas que aseguren el éxito en la solución de problemas, aquí solo se mostrarán algunos principios útiles que propone George Polya en su libro *How to Solve It*, el resto queda librado a tu curiosidad e inventiva ().

1. Comprender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que lo entendés.*¿Qué es lo desconocido?*

¿Cuáles son las cantidades que se mencionan?

¿Cuáles son las condiciones planteadas?

Para muchos problemas, sirve

dibujar un diagrama

Se hace necesario también,

utilizar la notación adecuada

2. Pensar un plan

Es fundamental encontrar una conexión entre la información dada y la desconocida que nos permita encontrar el valor o valores desconocidos.

Las siguientes estrategias pueden ser útiles en la elaboración de un plan:

- Tratar de reconocer algo familiar: Relacionar la situación dada con los conocimientos previos. Observar la incógnita y tratar de recordar un problema más familiar que tenga una incógnita similar.

- Tratar de reconocer patrones: Algunos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón, geométrico, numérico o algebraico que está ocurriendo.

- Usar analogías: Siempre es útil tratar de pensar en un problema similar o relacionado que sea más fácil que el original. Si se puede resolver un problema similar, más simple, podemos encontrar las pistas que se necesitan para resolver el problema original. Por ejemplo, si el problema tiene carácter general primero, puedes empezar por un caso particular.

- Introducir algo adicional: A veces es necesario introducir "una ayuda extra" para hacer una conexión entre lo conocido y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema algebraico la ayuda podría ser una nueva incógnita que se relaciona con la incógnita original.

- Tomar casos: Muchas veces es útil dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada caso. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia para enfrentar un valor absoluto.

- Trabajar hacia atrás: A veces es útil imaginar el problema resuelto y trabajar hacia tras, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Así, revirtiendo los pasos quizá se pueda construir una solución para el problema original.

- Establecer metas secundarias: En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales, para que una vez resueltos se pueda alcanzar así la meta final.

- Razonamientos indirectos: Otras veces es conveniente atacar un problema en forma indirecta. Por ejemplo, si tuviésemos una habitación con solo dos puertas, A y B, y quisiésemos probar que alguien entró por la puerta A, podríamos ir por el método directo y vigilar esa entrada para mostrar que entró por dicha puerta o bien, podríamos probar que alguien entró por la puerta A, mirando la puerta B; si una persona entró en la habitación y no lo hizo por la puerta B, tuvo que hacerlo por la puerta A. En matemática, para probar que una condición es verdad, muchas veces se asume que es falsa y e muestra que las consecuencias derivadas de ello son imposibles.

- Inducción matemática: Muchas veces es posible demostrar leyes generales a partir de casos particulares.

3. Ejecutar el plan

Llevar a cabo el plan consiste en implementar y desarrollar lo previsto en la elaboración del plan.

4. Mirar hacia atrás

Después de encontrar la solución, se revisan los procedimientos para ver si no se han cometido errores y se escribe el resultado. Además, la revisión del proceso puede ayudarnos a descubrir una forma más fácil de resolver el problema.

Veamos un ejemplo…

Una señora compró $\frac{1}{4}$ kg de zanahorias, $\frac{2}{3}$ kg de pollo y $\frac{1}{2}$ kg de papas. El kg de zanahorias cuesta \$ 15.-, el kg de pollo cuesta \$ 90.- y el kg de papas cuesta \$ 20.- ¿Cuántos kilogramos llevó en total?

1. Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita?

¿Cuántos kilogramos llevó en total?

- ¿Cuáles son los datos?

Los datos son las cantidades que acompañan a cada producto.

$\frac{1}{4}$ kg de zanahorias	$ 15.- el kg de zanahorias
$\frac{2}{3}$ kg de pollo	$ 90.- el kg de pollo
$\frac{1}{2}$ kg de papas	$ 20.- el kg de papas

- ¿Cuál es la condición?

La condición es el verbo que acompaña a cada dato.

Compró

Gastó

2. Pensar el plan

Es encontrar la relación entre los datos, la condición y la incógnita.

En este caso, el plan sería:

Sumar los kg que compró y el resultado obtenido es lo que llevó.

No me sirve de mucho saber el precio de producto para responder mi incógnita.

3. Ejecutar el plan

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}+\frac{6}{12}=\frac{3+8+6}{12}=\frac{17}{12}$$

4. Mirar hacia atrás

El resultado es el correcto pero sería más entendible si se expresa el resultado como decimal.

$$\frac{17}{12}\sim 1{,}42$$

Por lo que, la respuesta sería: La señora llevó aproximadamente 1,42 kg.

1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

En esta sección trabajaremos con los distintos conjuntos numéricos con el fin de fortalecer la operatoria y las propiedades que verifican.

Estos contenidos son sumamente importantes pues son la base para avanzar en otros temas por lo que esperamos que en esta Unidad puedas fortalecer tus habilidades y te pedimos que dejes de lado la calculadora.

1.1. NÚMEROS NATURALES

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para contar una determinada cantidad de elementos (existen siete notas musicales, 9 planetas, etc.), para establecer un orden entre ciertas cosas (el tercer mes del año, el cuarto hijo, etc.), para establecer medidas (3,2 cm; 5,7 kg; –4ºC; etc.), etc.

Actividad 1: Escribir los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en las casillas de forma que la suma de los tres números de cada fila, de cada columna, y de las dos diagonales, dé siempre el mismo resultado. A esta distribución se le llama **cuadrado mágico.**

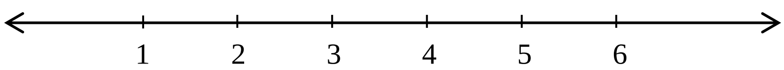
4		**2**
	5	
8		

Podemos afirmar que todos los números que utilizamos para resolver este problema son números naturales.

El conjunto de los números naturales está formado por aquellos que se utilizan para contar. Se los designa con la letra $\mathbb{N}$ y se representan:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Es un conjunto que tiene infinitos elementos pues, si bien tiene primer elemento, el 1, que es el menor de todos, no tiene último elemento ya que, es suficiente con sumar 1 a un número para obtener otro mayor. Así, podemos afirmar también que es un conjunto ordenado, por lo que podemos representarlos sobre una recta de la siguiente manera:



Observación:

* Todo número natural n tiene su sucesor $n + 1$ y también su antecesor $n - 1$, excepto el número 1 que solo tiene sucesor.

Siempre que se sumen dos números naturales se obtendrá otro número natural mientras que muchas veces, no sucede lo mismo si se restan.

¿Es posible encontrar un número que al restárselo a 32 dé por resultado 38?

Si lo traducimos al lenguaje algebraico: $32 - x = 38$, donde x representa al número buscado.

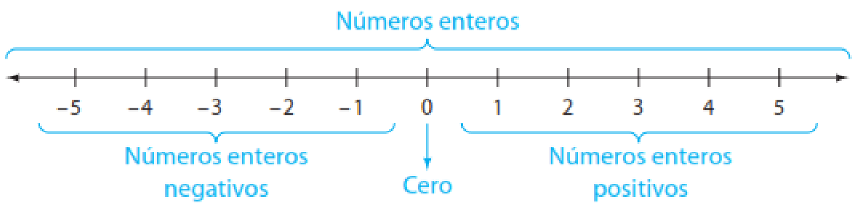
Es imposible encontrar un número natural que cumpla con estas condiciones. Decimos que esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales y lo escribimos así , $S = \emptyset$.

1.2. NÚMEROS ENTEROS

Para encontrar una solución a esta ecuación debemos buscarla en el conjunto de los números enteros, que se simboliza $\mathbb{Z}$ y está formado por los números naturales, el cero y los enteros negativos.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Los números enteros se pueden ubicar en una recta numérica. A la derecha del cero ubicamos los enteros positivos o números naturales y a la izquierda, los números enteros negativos. El cero es el único número entero que no es positivo ni negativo.



Podemos afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

El conjunto de los números enteros es un conjunto infinito que no tiene ni primer ni último elemento, por lo que todo elemento n de este conjunto tiene su siguiente, $n + 1$, y su anterior, $n - 1$.

Entre dos números enteros a y b hay siempre una cantidad finita de números enteros, esta propiedad se conoce con el nombre de discretitud.

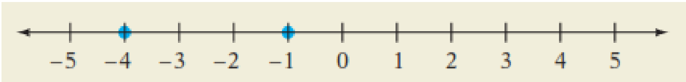
Observaciones:

* La suma de dos números enteros da siempre un número entero.
* La multiplicación de dos números enteros da siempre un número entero.

Relaciones de orden

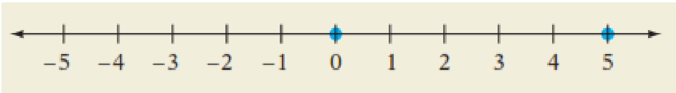
Si a y b representan a dos números cualesquiera y a está a la izquierda de b en la recta numérica, entonces decimos que a **es menor que** b y se expresa $\boldsymbol{a < b}$.

Por ejemplo, $-4 < -1$



Si a y b representan a dos números cualesquiera y a está a la derecha de b en la recta numérica, entonces decimos que a **es mayor que** b y se expresa $\boldsymbol{a > b}$.

Por ejemplo, $5 > 0$



También hay símbolos para la relación "**es menor o igual que**"($\leq$) y "**es mayor o igual que**"($\geq$).

Por ejemplo,

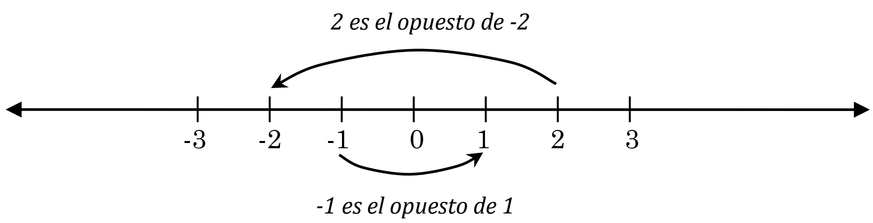
$-12 \leq -5$ (-12 es menor o igual que -5). Esta proposición es verdadera porque $-12 < -5$ $24 \leq 24$ (24 es menor o igual que 24). Esta proposición es verdadera porque $24 = 24$.

Números opuestos

Dado un número a, al número $-a$ se lo llama opuesto de a. Dos números opuestos son aquellos que se encuentran a la misma distancia (en unidades) del cero. Uno positivo y uno negativo, con excepción del cero, cuyo opuesto es él mismo.

Por ejemplo: Si $a = 4$, su opuesto $-a$ es -4

Si $a = -11$, su opuesto $-a$ es $-(-11) = 11$



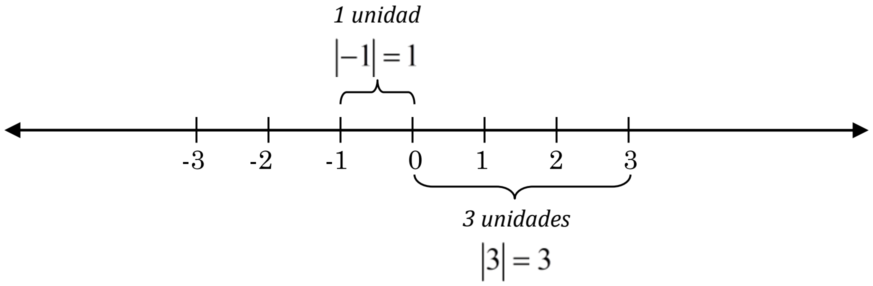
Es por ello que podemos afirmar que los números enteros negativos son en realidad, los opuestos de los números naturales.

Teniendo en cuenta la definición de número opuesto podemos afirmar que restar dos números es lo mismo que, al primero sumarle el opuesto del segundo.

Por ejemplo: $12 - 5 = 12 + (-5)$

Valor absoluto

El valor absoluto o módulo de un número a se define como la distancia de éste al cero. Por lo que, el valor absoluto de un número es siempre un número positivo o cero.

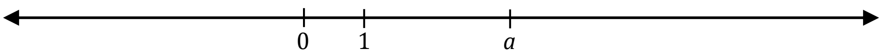


En símbolos, la definición de valor absoluto es $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Dos números opuestos tienen igual distancia al cero, es decir, tienen el mismo valor absoluto, por lo que podemos afirmar que $|a| = |-a|$.

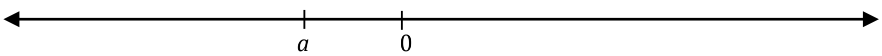
Actividad 2:

a) En la siguiente recta numérica están ubicados 0, 1 y a .



¿Dónde ubicarías los números $a + 1, -a$ y $-a + 1$?

b) En la siguiente recta están ubicados los números 0 y a.



¿Dónde ubicarías al número $-a$?

c) Completar con > o <

$|-105| \ldots . |64|$ $\quad |-23| \ldots . |-281|$ $\quad |-23| \ldots . |-1|$ $\quad |10| \ldots . |-45|$

d) Completar con <, >, ≤, ≥ o =

Si a es un número positivo entonces $|a| \ldots .\ a$

Si a es un número negativo entonces $|a| \ldots .\ a$

Múltiplos y divisores

🕮 Definición: a es **múltiplo** de b si es posible encontrar un número entero k, tal que

$$a = kb,\ con\ a, b, k \in \mathbb{Z}$$

Si a es múltiplo de b, la división de a por b tiene resto cero, por lo que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

* a es múltiplo de b
* b divide a a
* b es factor de a
* a es divisible por b

Por ejemplo: 30 es múltiplo de 5 pues $30 = 6 \cdot 5$, también podemos afirmar que:

5 divide a 30

5 es factor de 30

30 es divisible por 5

¿Podemos afirmar que 6 es múltiplo de 30?

División de números enteros

¿Qué sucede cuando dividimos dos números enteros?

$$4 \div 2 = 2 \ \text{ pues } \ 2 \cdot 2 = 4$$

$$-6 \div 3 = -2 \ \text{ pues } \ 3 \cdot (-2) = -6$$

En general $a \div b = c$, $b \neq 0$ si se verifica que $b \cdot c = a$

 Analicemos que sucede en las divisiones que involucran al cero

* ¿A qué es igual $0 \div 1$?

Si $0 \div 1 = \blacktriangle$ entonces $1 \cdot \blacktriangle = 0$

Como solo $1 \cdot 0 = 0$ entonces $\blacktriangle$ debe ser 0.

Este razonamiento es válido para cero dividido cualquier número real distinto de cero.

En general, podemos afirmar que para todo $a \neq 0$

$$0 \div a = 0\ ,\ \text{ pues } a \cdot 0 = 0$$

* Ahora, ¿A que es igual $5 \div 0$?

Si $1 \div 0 = \blacktriangle$ entonces $0 \cdot \blacktriangle = 1$

Como cero multiplicado por cualquier número es cero, no hay un valor que pueda reemplazar a $\blacktriangle$ para que la proposición sea válida.

En general, podemos afirmar que para todo $a \neq 0$

$a \div 0$ es indefinido o **inteterminado**

* ¿A qué es igual $0 \div 0$?

Si $0 \div 0 = \blacktriangle$ entonces $0 \cdot \blacktriangle = 0$

Como el producto de cualquier número y cero es igual a cero, el símbolo $\blacktriangle$ podría reemplazarse por cualquier número real, la solución no sería única.

En este caso, podemos afirmar que

$0 \div 0$ es **indeterminado**

Por ejemplo, $0 \div 2 = 0$ y $2 \div 0$ es indeterminado.

Pero, ¿cuál será el resultado de dividir a 4 por 3?

Debemos pensar en un número entero tal que al multiplicarlo por 3 dé como resultado 4. ¿Hay algún número entero que cumpla con esta condición?

Para resolver esta situación habrá que introducir otro conjunto numérico, el conjunto de los números racionales al que denotaremos con la letra $\mathbb{Q}$.

1.3. NÚMEROS RACIONALES

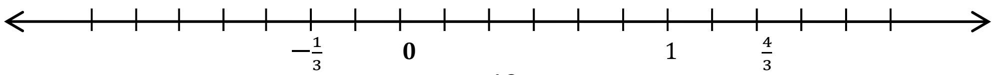
Definición: Un número racional es el cociente (división) de dos números enteros m y n, siendo $n \neq 0$. Por lo tanto: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$, donde m es el numerador y n el denominador. Notemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

De la definición de número racional surge que todo número entero es racional, pues podemos considerar al entero como un racional de denominador 1, o podemos escribirlo como una fracción equivalente.

Por ejemplo: $-3 = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2}$, donde $-3 \in \mathbb{Z}$, $1 \in \mathbb{Z}$, $-6 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}$ y $1 \neq 0$, $2 \neq 0$.

¿Por qué se excluye al 0 del denominador en la definición?

Actividad 3: Representemos en la siguiente recta numérica al $\frac{1}{2}$ y al $-\frac{5}{6}$



Fracciones equivalentes

Si consideramos dos números racionales, por ejemplo $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, nos interesa ubicarlos en la recta numérica para establecer el orden entre ellos, o bien podríamos determinar el mayor y el menor sin la necesidad de ubicarlos en la recta. Para ello, nos resulta útil conocer el concepto de fracciones equivalentes.

📖 Definición: Diremos que las fracciones , $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son **fracciones equivalentes**, es decir, representan el mismo número, siempre que sea posible determinar un número k de manera que se verifique que $a \cdot k = c$ y que $b \cdot k = d$.

Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{5}$ de un entero, implica dividir en 5 unidades a nuestro entero y considerar de esas porciones tres.

Gráficamente,

Podríamos pensar que, en lugar de realizar 5 divisiones iguales en nuestro entero, sean diez y considerar de estas diez porciones seis, resultando:

Como podemos observar, la porción representada equivale a la primera, ya que:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \qquad k = 2$$

Si nos interesara saber cuál de los números $\frac{3}{5}$ o $\frac{7}{9}$ es mayor podríamos trabajar con fracciones equivalentes que tengan el mismo numerador o el mismo denominador.

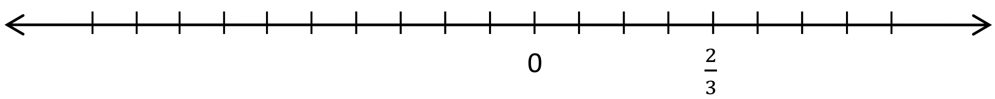
$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{27}{45}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{35}{45}$$

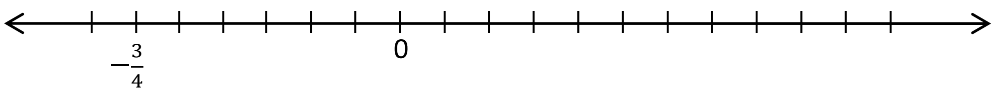
$$\therefore \quad \frac{3}{5} < \frac{35}{45}$$

Actividad 4: En cada caso, ubicar en la recta numérica los números racionales indicados.

a) $-\frac{4}{3}$



b) $\frac{3}{8}$ y 1



Expresiones decimales

Ahora analicemos algunas expresiones decimales:

- 0,3 es la expresión decimal de un número racional porque $0{,}3 = \frac{3}{10}$ y 3 y 10 son números enteros.
- $0,\hat{5} = 0{,}555 \ldots$ es la expresión decimal de un número racional porque $0,\hat{5} = \frac{5}{9}$ y 5 y 9 son números enteros.
- $0{,}1\hat{5} = 0{,}1555 \ldots\ldots$ es la expresión decimal de un número racional porque $0{,}1\hat{5} = \frac{14}{90}$ y 14 y 90 son números enteros.

Estos tres últimos ejemplos muestran los tres tipos diferentes de expresiones decimales que puede tener un número racional:

- Expresión decimal finita: $0{,}3$; $-0{,}107$; $12{,}001$
- Expresión decimal periódica pura: $0,\widehat{23} = 0{,}2323 \ldots$; $7,\widehat{210} = 7{,}210210210 \ldots$
- Expresión decimal periódica mixta: $0{,}1\hat{5} = 0{,}1555 \ldots$; $-5{,}25\widehat{1743} = -5{,}2517431743 \ldots\ldots$

Todo número racional puede escribirse como una expresión decimal cuya parte decimal puede tener un número finito de cifras o puede tener un número infinito de cifras pero periódicas, pura o mixta.

Supongamos que nos dan el número decimal $23{,}3\hat{5}$. Es una expresión decimal periódica mixta, así que ya sabemos que es un número racional y por lo tanto se tiene que poder expresar como una fracción (cociente de dos enteros). ¿Qué fracción es?

Para hallar esta fracción, existe una regla muy simple que podemos resumir así:

$$\frac{(\text{todas las cifras de la expresión}) - (\text{las cifras no periódicas de la expresión})}{\text{tantos } 9 \text{ como cifras decimales periódicas y tantos } 0 \text{ como cifras decimales no periódicas}}$$

Aplicando esta regla al ejemplo, obtenemos: $23{,}3\hat{5} = \frac{2335-233}{90} = \frac{2102}{90}$

Y simplificando la fracción obtenemos: $23{,}3\hat{5} = \frac{1051}{45}$

Otro ejemplo: $32{,}1\widehat{427} = \frac{321427-321}{9990} = \frac{321106}{9990} = \frac{160553}{4995}$

 Observación:

* Siempre podemos verificar si la fracción que obtuvimos es correcta realizando la división y verificando que el resultado coincide con la expresión decimal que teníamos.

$*$ Veremos la justificación de estas reglas al trabajar con ecuaciones.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Antes de comenzar con las operaciones vamos a recordar algunos conceptos.

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números, variables, símbolos de agrupación y operaciones.

Son ejemplos de expresiones algebraicas: $x^2 - 9$, $4x - 3$, $5(8-3)+6$, $\frac{-12+7}{4}$

Cuando una expresión algebraica consta de varias partes, a las partes que se suman se las denomina **términos**.

Por ejemplo, la expresión $2x - 3y - 12$ puede escribirse como $2x + (-3y) + (-12)$ por lo que podemos afirmar que la expresión $\underbrace{2x}\underbrace{-3y}\underbrace{-12}$ tiene 3 términos: $2x, -3y$ y -12 .

Al multiplicar dos o más expresiones, cada expresión es un **factor** del producto.

Por ejemplo**,** en la expresión $-3 \cdot 8$, -3 y 8 son los factores de ese producto. De manera similar, en la expresión $6ab$ los factores son $6, a$ y b .

 Retomemos la expresión $2x - 3y - 12$, observemos que en algunos de los términos hay factores. Por ejemplo, en el término $2x$, el 2 y la x son factores y en el término $3y$, el -3 y la y son factores.

OPERACIONES CON FRACCIONES

Suma de fracciones

Recordemos que la suma de varias fracciones con igual denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

Por ejemplo: $\frac{3}{5} + \frac{13}{5} + \left(-\frac{21}{5}\right) = \frac{3+13-21}{5} = \frac{5}{5} = 1$

Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente.

Por ejemplo: $\frac{3}{7} - 2 + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} - \frac{42}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9-42+5}{21} = -\frac{28}{21}$

Si necesitamos buscar fracciones equivalentes a otras dadas para realizar una suma es aconsejable buscar el **mínimo común múltiplo** ($m.c.m.$) entre los denominadores.

Mínimo común múltiplo

En una fábrica se oye, cada 18 segundos, el golpe de un martillo y cada 24 segundos, el escape de la presión de una válvula. Si se acaban de oír ambos ruidos simultáneamente ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que vuelvan a coincidir?

Para poder calcular el tiempo que transcurrirá hasta oír ambos ruidos a la vez debemos calcular el primer múltiplo común entre 18 y 24.

Los primeros múltiplos positivos de 18 son: 18, 36, 54, **72**, 90, 108, 126, **144**, 162,….

Los primeros múltiplos positivos de 24 son: 24, 48, **72**, 96, 120, **144**, 168,….

Observemos que hay un número infinito de múltiplos de cada uno de ellos y a su vez, hay infinitos múltiplos comunes a ambos: 72, 144, … El menor de ellos es el 72 y es el que llamamos mínimo común múltiplo por ser el menor de los múltiplos comunes y lo indicamos

$$mcm(18{,}24) = 72$$

Otra forma de encontrar el mínimo común múltiplo entre dos números es descomponiéndolos a cada uno de ellos en el producto de sus factores primos y multiplicando todos los factores que sean diferentes y de los factores que sean iguales, multiplicando el que tenga el mayor exponente.

En este ejemplo:

$$18 = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 24 = \pm 1 \cdot 2^3 \cdot 3$$

$$mcm(18{,}24) = \pm 1 \cdot 2^3 \cdot 3^2$$

Actividad 5:

1) Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

   a) 15 y 20 b) 30 y 45 c) 4, 6 y 10 d) 12 y 18

2) Resolver las siguientes sumas algebraicas:

   a) $\frac{7}{30} + \frac{4}{5} - \frac{8}{45}$ b) $\frac{11}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{18} - \frac{9}{10}$


Recordemos que estas expresiones son equivalentes: $-\frac{3}{8} = \frac{-3}{8} = \frac{3}{-8}$

En general, podemos afirmar que

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad , \qquad b \neq 0$$

Producto de números racionales

En general, el producto entre dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $b, d \neq 0$ es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \qquad b, d \neq 0$$

Coloquialmente, la multiplicación de una fracción por una cierta cantidad se lee como "la fracción de esa cantidad". Por ejemplo, $\frac{3}{4} \cdot 16$ se lee "tres cuartos de 16" o "las tres cuartas partes de 16" y se calcula

$$\frac{3}{4} \cdot 16 = \frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 1} = \frac{48}{4} = 12$$

Es muy útil **simplificar** antes de realizar el producto.

Actividad 6:

a) La región euroasiática-africana ocupa aproximadamente $\frac{3}{5}$ partes de las tierras emergidas. Asia ocupa aproximadamente la mitad de esa región. ¿Qué parte de la superficie terrestre está ocupada por Asia?

b) ¿Cuántos días representan $\frac{4}{15}$ en un mes (30 días)?

¿Qué sucede cuando multiplicamos cualquier fracción por 1?

¿Qué resultado se obtiene al realizar las siguientes multiplicaciones:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \ldots \qquad \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = \ldots \qquad \frac{1}{3} \cdot 3 = \ldots$$

Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ $, a, b \neq 0$ se llaman **inversos multiplicativos**.

Actividad 7:

a) Encontrar el inverso multiplicativo de $\frac{4}{9}$ y de $\frac{6}{5}$.

b) ¿El cero tiene inverso multiplicativo? ¿Por qué?

División de fracciones

Retomemos la Actividad 6 a), para calcular que superficie ocupa Asia podríamos dividir a $\frac{3}{5}$ en 2, es decir,

$$\frac{3}{5} \div 2 = \frac{\frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

Así, podríamos concluir que para dividir dos números racionales podemos multiplicar la fracción que está en el numerador por el inverso multiplicativo de la fracción que está en el denominador. En símbolos,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad , b, c, d \neq 0$$

Por ejemplo, ¿cuántas varas de $\frac{3}{4}$ m se pueden cortar si se tienen $\frac{13}{2}$ m de alambre?

$$\frac{13}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{13}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{13 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{13 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$$

Se podrán cortar 8 varas y sobrarán $\frac{2}{3}$ m de alambre.

Actividad 8:

Calcular $\frac{4}{\frac{4}{3}}$, $\frac{\frac{9}{5}}{9}$, $\frac{\frac{3}{4}}{4}$

Porcentajes

Las fracciones o expresiones decimales muchas veces se expresan como **porcentajes**, por ejemplo, 8% quiere decir $\frac{8}{100}$ ó, lo que es lo mismo, 0,08. En general, b% significa "b partes de 100" y es otra manera de escribir $\frac{b}{100}$.

Por ejemplo, el 42% significa $\frac{42}{100}$ entonces $42\% = \frac{42}{100} = 0{,}42$

La unidad representa el 100% entonces una forma simple de convertir una expresión decimal a porcentaje es multiplicando por 100%.

Por ejemplo: $0{,}75 = 0{,}75 \cdot 1 = 0{,}75 \cdot 100\% = 75\%$.

Los porcentajes se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones de cantidades como población, salarios o precios.

Actividad 9:

a) Si la inflación de un determinado mes es del 3% y un trabajador cobrase \$ 18.000 en ese mes ¿cuál debería ser el salario del mes siguiente para compensar la inflación?

b) El precio de una camisa sin IVA es de \$650. Si el IVA es del 21% ¿cuál será el precio final de la camisa? Por pagar al contado se hace un descuento del 10% sobre el precio de lista y si paga con tarjeta de crédito se realiza un recargo del 5% ¿cuál será la diferencia, en pesos, de pagar de una u otra forma?

c) Un artículo que costaba inicialmente \$ 1500 fue rebajado en diciembre un 12%. En el mes de enero tuvo una segunda rebaja de un 15% y, en febrero, se rebajó otro 10%. ¿Cuál es el precio final después de las tres rebajas? ¿Cuál es el porcentaje total de la rebaja?

$\mathbb{Q}$ es un conjunto denso

Si n es un número entero, $n+1$ es el entero siguiente y no existe otro número entero entre ellos. Pero, a diferencia del conjunto de los números enteros, en $\mathbb{Q}$ no tiene sentido hablar de siguiente ni de anterior. Por ejemplo, si $n=\frac{1}{2}$ no podemos afirmar que $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ sea su sucesor inmediato pues existe el 1 o el $\frac{3}{4}$ que están entre ellos y podríamos seguir encontrando otros números racionales que cumplan con la misma condición.

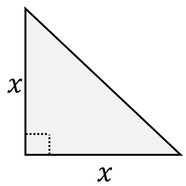
Observemos que entre dos números racionales, a y b , $a<b$, existe el racional $\frac{a+b}{2}$ que verifica: $a<\frac{a+b}{2}<b$

Conclusión: entre dos racionales distintos a y b existen infinitos números racionales.

Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto $\mathbb{Q}$ es un **conjunto denso**, en contraposición a los naturales $\mathbb{N}$ y los enteros $\mathbb{Z}$ que, como ya dijimos, son conjuntos discretos.

1.4. NÚMEROS IRRACIONALES

¿Cuáles son las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si se sabe que su área es 6,5 cm^2?



Como el triángulo es rectángulo isósceles, sus catetos son iguales por lo que el área que es de 6,5 cm^2 queda expresada con la siguiente ecuación:

$$\frac{b\cdot h}{2}=\frac{x\cdot x}{2}=6{,}5 \Leftrightarrow x^2=13$$

Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números racionales, porque no existe ningún número racional que elevado al cuadrado dé por resultado 13.
Aparece entonces un nuevo conjunto numérico, el de los números irracionales que se simboliza con $\mathbb{I}$. Los elementos de este conjunto tienen desarrollo decimal infinito no periódico.

El lado del triángulo anterior mide $\sqrt{13}$ y es un número irracional. Otros números irracionales son:

$6{,}12123123412345\ldots \qquad \pi = 3{,}14159254\ldots$

$-15{,}161718192021\ldots \qquad \sqrt[3]{7}$

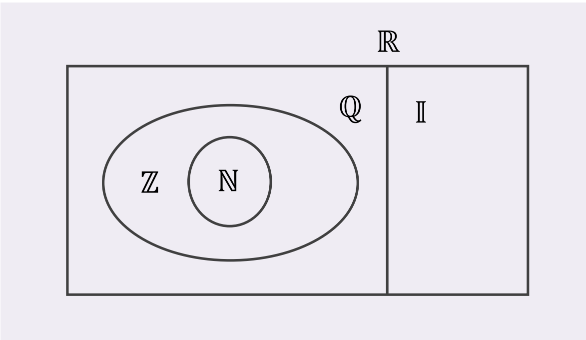
Los tres puntos significan que los dígitos continúan interminablemente, sin que sean periódicos o que esas cifras sean las últimas. A pesar de que no podemos escribir una expresión decimal que sea exactamente igual a $\sqrt{2}$ o a π, podemos dar una aproximación de esos números. El símbolo $\cong$ se lee "aproximadamente igual a".

Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ y redondeada a la milésima más cercana es $\sqrt{2} \cong 1{,}414$.

1.5. NÚMEROS REALES

El conjunto formado por los números racionales y por los irracionales se llama conjunto de los números reales y se simboliza $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Los números reales tienen la propiedad de llenar por completo la recta numérica, por eso se la llama recta real.

Dado un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponde un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.

Suma y producto en $\mathbb{R}$

Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{R}$ cumplen ciertas propiedades. Veamos algunas de ellas:

Sean a, b y c números reales cualesquiera

Propiedades	**de la Suma**	**del Producto**
Ley de cierre	$a+b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Existencia de elemento neutro	Es el 0: $a+0=0+a=a$	Es el 1: $a\cdot 1=1\cdot a=a$
Existencia de inverso	Es el opuesto aditivo: $a+(-a)=(-a)+a=0$	Es el inverso multiplicativo: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1 \;\; si \;\; a\neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ y $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

Observación: La propiedad asociativa nos permite prescindir del uso de paréntesis y escribir simplemente $a+b+c$ ó $a\cdot b\cdot c$.

Actividad 10: Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas, mencionar las propiedades utilizadas y en caso de ser falsas, explicar claramente por qué.

a) $\frac{1}{3}\cdot(5+4)=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}$
b) $-2\cdot\left(\frac{8}{9}-5\right)=-2\cdot\frac{8}{9}-5$
c) $\sqrt{2}+c=c+\sqrt{2}$
d) $3+[8\cdot(-9)]=(3+8)\cdot[3+(-9)]$
e) $\frac{1}{a}\cdot a=1, \forall a\in R$
f) Existe un número real x para el cual $\frac{\sqrt{5}}{\pi}+x=0$

Potenciación

🕮 Si a es un número real y n es un número natural, entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a, es decir:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ veces}$$

Por ejemplo: $a^3=a\cdot a\cdot a$

Decimos entonces que a^n es una potencia que tiene a como base y n como exponente.

Extendemos la definición para exponentes enteros definiendo, para a $\neq 0$

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{-n} = (a^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por ejemplo, a) $abaa = a^3b$ b) $8xxx8yy = 8^2x^3y^2$

Observación: Tenemos que tener cuidado de no confundir una suma con una multiplicación.

$$x + x + x + x + x = 5x \qquad \text{y} \qquad x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

Diferencia entre $-x^2$ y $(x)^2$

Un exponente se aplica solo al número o letra que lo precede en forma directa, a menos que utilicemos paréntesis para indicar otra cosa.

Por ejemplo, si consideramos $7x^3$ solo la x está elevada al cubo.

Veamos la diferencia entre $-x^2$ y $(-x)^2$:

La expresión $-x^2$ se lee *"el opuesto de x al cuadrado"* mientras que $(-x)^2$ se lee *"el cuadrado del opuesto de x"*.

$$-x^2 = -x \cdot x$$

$$(-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2$$

Actividad 11: Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a) $2^8 = 2^2 \cdot 2^6 = 2^5 \cdot 2^3$
b) $(8+3)^2 = 8^2 + 3^2$
c) $(8 \cdot 3)^2 = 8^2 \cdot 3^2$
d) $(2^3)^2 = 2^5$
e) $(2^3)^2 = 2^6$
f) $-3^2 = (-3)^2$
g) $5^4 = 4^5$
h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{3^{-2}}$
i) $5^{-2} = -10$

La actividad anterior ejemplifica algunas de las siguientes propiedades de la potencia:

Sean a, b números reales distintos de 0 y sean m, n números enteros.

Propiedades de la Potencia	
Distributiva con respecto al producto	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Distributiva con respecto a la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^m =$ ……………………….
Producto de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} =$ ……………………………
Potencia de potencia	$(a^n)^m =$ ……………………….

La potencia no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta.

¿Qué sucede si a un número negativo lo elevamos a una potencia par? ¿Cuál es el signo del resultado?

Radicación

Para los enteros positivos n ya se ha definido la n-ésima potencia de b, a saber, b^n. Ahora vamos a utilizar la ecuación $a = b^n$ para definir la n-ésima raíz de a.
La notación de la raíz cuadrada de 49 es $\sqrt{49}$. Su valor es 7 porque $7^2 = 49$ y $7 > 0$. Aun cuando $(-7)^2 = 49$, el símbolo $\sqrt{49}$ se usa sólo con $+7$ y no con -7, así que se tendrá un solo valor de $\sqrt{49}$. Claro que siempre es posible escribir $-\sqrt{49}$ si se desea el valor negativo -7.

Podemos observar que -49 no tiene una raíz cuadrada real ya que $b^2 > 0$ para todo número real b, por lo que $b^2 = -49$ no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Si a es un número real positivo, $\sqrt{a} = b$ si y sólo si $a = b^2$ y $b > 0$

b recibe el nombre de raíz cuadrada principal de a.

Además, $\sqrt{0} = 0$.

Ejemplo: $\sqrt{25} = 5$, pues $5^2 = 25$ (no es -5 ni ± 5)

En el caso de las raíces cúbicas se puede utilizar tanto números positivos como negativos, así como el cero. Por ejemplo, $2^3 = 8$ y $(-5)^3 = -125$

Se puede decir entonces que,

Si a y b son números *reales cualesquiera*, $\sqrt[3]{a} = b$ si y sólo si $a = b^3$
En particular, $\sqrt[3]{0} = 0$

Ejemplos: $\sqrt[3]{343} = 7$ pues $7^3 = 343$
$\sqrt[3]{-1728} = -12$ pues $(-12)^3 = -1728$

Se puede ver que existe una diferencia básica entre las raíces cuadradas y las raíces cúbicas. Las raíces cuadradas están definidas sólo para los números reales positivos y el cero. Las raíces cúbicas están definidas para cualquier número real.
Lo mismo sucede con cualquier entero positivo n: la distinción fundamental surge de si n es par o impar.

- Si n es un entero positivo par y a y b son números **reales positivos** tales que $a = b^n$, entonces existe $\sqrt[n]{a} = b$.

- Si n es un entero positivo impar y a y b son números **reales** tales que $a = b^n$ entonces existe $\sqrt[n]{a} = b$.

- En cualquiera de los dos casos, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Observaciones:

El número a es el radicando, $\sqrt{\ }$ es el signo radical, n es el índice del radical y $\sqrt[n]{a}$ es la expresión radical o raíz $n-$ ésima de a.

* El símbolo $\sqrt{a}$ se utiliza sólo para representar $\sqrt[2]{a}$.

Potencias de exponente fraccionario

Observemos las siguientes analogías:

$$a^{\frac{6}{3}} = a^2 \ \text{ y } \ \sqrt[3]{a^6} = a^2 \qquad\qquad a^{\frac{15}{5}} = a^3 \ \text{ y } \ \sqrt[5]{a^{15}} = a^3$$

Estos ejemplos nos inducen a adoptar la siguiente definición para el caso de potencias de exponente fraccionario:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}\ , \ \text{donde } \ a \in \mathbb{R}^+ \ , \ n \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ m \in \mathbb{N}$$

¿Cuándo es posible calcular una potencia de exponente fraccionario y base negativa?

Veamos ahora las propiedades de la radicación, las cuales son análogas a las de la potenciación.

Propiedades de la Radicación (a y b números reales y n, m números naturales)*	
Distributiva con respecto al producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Distributiva con respecto a la división	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

(*) Estas propiedades son válidas siempre que los radicales tengan sentido en el conjunto de los números reales.

¿Es posible aplicar la propiedad distributiva de la radicación respecto a la suma o a la resta? Proponer ejemplos.

¿Qué sucede al aplicar la propiedad distributiva al siguiente radical: $\sqrt{(-4) \cdot (-16)}$?

Simplificación de radicales

Actividad 12: Efectuar las siguientes operaciones

a) $\sqrt[4]{2^8}$, $\sqrt{2^4}$ y 2^2 b) $\sqrt[10]{3^{20}}$, $\sqrt{3^4}$ y 3^2 c) $\sqrt{(-2)^6}$ y $(-2)^3$

> Observemos que, en algunos casos se puede dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número sin alterar el resultado. A esta propiedad la llamaremos **simplificación de radicales.**

* Si el índice de la raíz es impar se puede simplificar siempre sin tener en cuenta el signo de la base del radicando. Por ejemplo:

  $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ (dividimos índice y exponente por *5*)

  $\sqrt[7]{\left(\frac{2}{3}\right)^{21}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ (dividimos índice y exponente por *7*)

* Si el índice de la raíz es par, sólo se puede simplificar si la base es positiva, ya que si la base fuera negativa podría presentarse el siguiente caso:

  $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ (dividimos índice y exponente por 4) *y en realidad*, $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$.

  Vemos que los resultados no coinciden. Por lo tanto:

> Cuando el índice es PAR y el radicando es NEGATIVO, **NO** se puede simplificar.

Notemos que la única diferencia en el resultado es el signo y que las raíces de índice par dan como resultado siempre un número positivo. Podemos entonces escribir: $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$,
Entonces podemos afirmar que:

> Si n es impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$ Si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Actividad 13: Descubrir los errores cometidos en el siguiente desarrollo.

$$\sqrt[4]{2^8}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{(-2)^8}}+\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8}+\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = 2^2\cdot\frac{1}{-2}+\sqrt{(-2)(-8)}+\left(-\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= \frac{4}{-2}+\sqrt{16}+\frac{25}{9}$$

$$= -2+4+\frac{25}{9}$$

$$= \frac{43}{9}$$

Racionalización de denominadores

Cuando una expresión fraccionaria tiene indicado en el denominador un radical, resulta ser conveniente modificar tal expresión- sin cambiar su significado-por otra cuyo denominador sea racional. Este proceso recibe el nombre de racionalización del denominador.

Trabajaremos solo algunos casos:

1) **El denominador tiene un radical único**: Multiplicamos numerador y denominador por un radical que tenga:

- igual índice que el que figura en el denominador si el índice de la raíz es 2.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\,\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

- radicando tal que al efectuar el producto de este con el radicando del radical que existe, resulte una expresión (un número) que tenga como exponente un múltiplo del índice (al cual pueda calculársele la raíz en racionales).

Ejemplo:

$$\frac{14}{\sqrt[3]{7}} = \frac{14\cdot\sqrt[3]{7}^2}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7}^2} = \frac{14\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7}^3} = \frac{14\sqrt[3]{49}}{7} = 2\cdot\sqrt[3]{49}$$

2) **El denominador de dos términos con uno o ambos con radicales de igual índice:**

Aplicamos la siguiente propiedad: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.

- Operamos teniendo en cuenta el conjunto numérico al cual pertenecen los números.

Ejemplo:

$$\frac{15}{\sqrt{5}-\sqrt{8}} = \frac{15\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)} = \frac{15\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{5}^2-\sqrt{8}^2} = \frac{15\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{-3} = -5\cdot 15\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)$$

Logaritmación

📖 **Definición**: Sea $\mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}, \mathrm{b} > 0$ y $\mathrm{b} \neq 1$, el logaritmo de a con base b se define como

$$\log_{\mathrm{b}} \mathrm{a} = \mathrm{c} \Leftrightarrow \mathrm{b}^{\mathrm{c}} = \mathrm{a}$$

Observación: $\mathrm{b} > 0$ y $\mathrm{b} \neq 1 \Longrightarrow \mathrm{b}^{\mathrm{c}} > 0 \Longrightarrow \mathrm{a} > 0$

La logaritmación es una operación que nos permite encontrar el exponente de una potencia conociendo la base y el resultado de calcular la potencia.

Por ejemplo ¿A qué número hay que elevar el 2 para obtener el número 16?

Como para obtener el 16 hay que elevar a 2 a la cuarta, decimos que 4 es el logaritmo en base 2 de 16 y se escribe:

$$\log_2 16 = 4$$

Ejemplo: Calcular, en caso de ser posible

$\log_3 81 =$ $\qquad$ $\log_5 1 =$ $\qquad$ $\log_7(-49) =$ $\qquad$ $\log 0{,}01 =$ $\qquad$ $\log_4 0 =$ $\qquad$ $\log_6 \frac{1}{36} =$

Propiedades

1. $\log_b b = 1$ $\qquad$ Ej: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$

2. $\log_b 1 = 0$ $\qquad$ Ej: $\log_{\frac{3}{5}} 1 = 0$

3. $b^{\log_b a} = a$ $\qquad$ Ej: $9^{\log_9 3} = 3$

4. $\log_b a^c = c \cdot \log_b a$ $\qquad$ Ej: $\log_3 81^{250} = 250 \cdot 4 = 1000$

Consecuencia: $\log_b b^c = c$

5. $\log_b a + \log_b c = \log_b(a \cdot c)$ $\qquad$ Ej: $\log_{10} 50 + \log_{10} 2$

6. $\log_b a - \log_b c = \log_b\left(\frac{a}{c}\right)$ $\qquad$ Ej: $\log_3 75 - \log_3 25$

7. $\log_b a = \frac{\log_{b'} a}{\log_{b'} b}$

1.6. ACTIVIDADES PRÁCTICAS

1) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La suma de dos números naturales es siempre un número natural.

b) La diferencia de dos números naturales es siempre un número natural.

c) El cuadrado de un número racional negativo es un racional positivo.

d) Existen infinitos números racionales comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2}$.

e) El conjunto de los números naturales carece de primer elemento.

2) Un número n está a la derecha del número 8 en la recta numérica. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
a) n es positivo $\qquad$ b) n es negativo $\qquad$ c) n es 0 $\qquad$ d) n puede ser positivo, negativo o 0

3) Un número n está a la izquierda del número 8 en la recta numérica. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?
a) n es positivo $\qquad$ b) n es negativo $\qquad$ c) n es 0 $\qquad$ d) n puede ser positivo, negativo o 0

4) ¿La desigualdades $6 \geq 1$ y $1 \leq 6$ expresan la misma relación de orden?

5) Utilizar el símbolo "$\leq$" para reescribir la relación de orden expresada por la desigualdad $-2 \geq 5$.

6) Completar:

a) Si a es un número positivo, entonces $-a$ es un número …………

b) Si a es un número negativo, entonces $-a$ es un número …………

c) El opuesto del valor absoluto de -12 es ……….

d) El valor absoluto del opuesto de 12 es …………

7) ¿196 y 245 son múltiplos de 7? Justificar. ¿Por qué podemos afirmar que la suma de ellos también es múltiplo de 7?

8) Dado un número entero cualquiera: ¿Cuál es su divisor positivo más pequeño? ¿y el más grande?

9) Dado un número natural cualquiera: ¿Cuál es su múltiplo positivo más pequeño? ¿Podés encontrar el más grande?

10) Responder:

a) Si $m = 14$ ¿cómo pueden representarse los números 13,15 y 16 en términos de m?

b) Sea n un número par cualquiera, ¿cuál es el siguiente entero par? ¿Cuál el anterior?

c) Si x representa cualquier entero impar, ¿cuál es el siguiente entero impar? ¿Cuál el anterior?

d) Si x es cualquier entero par, ¿$x + 1$ es un entero par o impar? ¿Y $x – 1$?

e) Si x es cualquier entero, ¿$2x$ es par o impar? ¿Y $2x – 1$? ¿Y $2x + 1$?

11) Sin resolver una ecuación, determinar si 40% de 80 es menor, igual o mayor que 80% de 40.

12) Tres hermanos, Juan, pedro y Luis, reciben una herencia de $ 800.000. En el testamento queda establecido que Pedro debe recibir el 30% de la herencia, Juan las dos quintas partes de lo que queda y el resto es para Luis. ¿Cuál de los tres hermanos recibe la mayor parte de la herencia?

13) Por trasladar a una persona enferma, la empresa de ambulancias cobra $ 2250 sin IVA. Sabiendo que el IVA es del 10,5% ¿cuánto deberá pagar el paciente al momento del traslado? Si esa persona tiene Obra Social, solo paga el 40% del precio total. ¿Cuál sería el costo que absorbe la Obra Social?

14) Una zapatería quiere cobrar un recargo del 15% para las compras con tarjeta de crédito pero para que los clientes no se molesten cuando les advierte del recargo decide hacer los siguiente: cambia los precios de toda la mercadería, aumentándolos en un 15% y al momento de la venta

les dice que por pago contado efectivo les hace un 15% de descuento. Si un par de sandalias cuesta en realidad \$ 3800, luego de todos estos cálculos ¿el cliente que paga al contado pagará efectivamente ese precio? Si la mayoría de las ventas son al contado, le conviene al comerciante este método?

15) Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) si $a = -2$ y $b = 0$, entonces $a : b = 0$

b) $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

c) el cociente entre un número y su opuesto es igual a -1

d) $a + (-b + c) = a - b + c$

e) el inverso de 2 es $-\frac{1}{2}$.

f) $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ con $b + c \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$

g) $b - [-c \cdot (2 - 1) - 1] = b$

h) $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{b}$ con $a + b \neq 0$ y $b \neq 0$

i) $(b + c) : a = b : a + c$, con $a \neq 0$

j) para todo $a \in \mathbb{R}$, $a : a^{-1} = 1$

k) para todo $a \in \mathbb{R}$, $(a^{-1})^{-1} = a$

l) la ecuación $2x = 1$ tiene solución en $\mathbb{Z}$

16) Calcular:

a) $\dfrac{\frac{2}{7}-\frac{1}{4}}{6-\frac{2}{3}} =$ b) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}} =$ c) $\dfrac{\frac{1}{b}+a}{\frac{a}{b}} =$ d) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{1}{a}}{\frac{b}{a}+\frac{1}{a}} =$

17) Calcular:

a) $(5 + 3)^2 =$ .... $5^2 + 3^2 =$ ....

b) $\left(\frac{2}{3}-1\right)^4 =$ .... $\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1^4 =$ ....

c) $(-2)^3 =$ .... $3^{-2} =$ ....

d) $(-2)^{3^2} =$ .... $\left[(-2)^3\right]^2 =$ ....

18) Completar con $=$ ó $\neq$ y justificar:

a) -4^2 _____ $(-4)^2$

b) $1 - 2 \cdot \frac{5}{4}$ ____ $(1 - 2) \cdot \frac{5}{4}$

c) $\dfrac{2^3}{4-\frac{1}{2}}$ ____ $2^3 \div \left(4 - \frac{1}{2}\right)$

19) Resolver los siguientes cálculos combinados y expresar la respuesta como una fracción irreducible.

a) $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 - (-2)^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)$

b) $\dfrac{7 \cdot \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)}{\frac{1}{4}-2}$

c) $\dfrac{(-3)\cdot(-3+1)+\frac{4}{5}}{\left(4-\frac{2}{3}\right)\left(4+\frac{2}{3}\right)}$

d) $\dfrac{\left(-\frac{1}{8}-1\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\frac{1}{4}-\left(1-\frac{1}{5}\right)} \div \left(2 - \frac{2}{11}\right)$

20) Resolver aplicando propiedades de la potenciación:

a) $\frac{(3^2 \cdot 2^3)^3}{6^6} =$

b) $a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{-1} \cdot a \cdot a^{-\frac{5}{6}} =$

c) $\left[\frac{2(3b^{-2}d)bd^3}{12b^3d^{-1}}\right]^5 =$

d) $0{,}2^{-\frac{5}{2}} : (5^{-1})^{\frac{3}{4}} =$

21) En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar las propiedades. Indicar cuáles son y corregirlos.

a) $(2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5)^2 = (2^4)^2 = 2^{16}$

b) $(5^2)^4 : (5^{-3})^2 = 5^6 : 5^{-6} = 5^0 = 1$

c) $\frac{7^4(7^2)^6}{(7^9)^2} = \frac{7^4 \cdot 7^{12}}{7^{18}} = (-7)^2 = 49$

d) $(7 \cdot 2 - 14)^0 + 5^0 = 2$

22) Determinar si han sido resueltos en forma correcta los siguientes ejercicios y justificar:

a) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

b) $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{36} = 6$

c) $\sqrt{(-2) \cdot (-8)} = \sqrt{16} = 4$

d) $\sqrt{9+16} = 3 + 4 = 7$

e) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

f) $\sqrt[3]{-64} : \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{\frac{-64}{-8}} = \sqrt[3]{8} = 2$

23) Expresar como potencia de exponente fraccionario y calcular:

a) $\sqrt[8]{13} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^{-2} =$

b) $\frac{16^{0.25} \cdot \sqrt[3]{2}}{-4} =$

c) $\frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{27}} =$

24) Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones:

a) $\frac{-8}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}} =$

b) $\frac{7}{\sqrt{5^3 \cdot 3^4}}$

c) $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

25) Verificar que se cumple la siguiente igualdad, considerando $a > 0, b > 0$

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$$

¿Qué ocurre si $a = b$?

26) Calcular, en caso de ser posible:

a) $\log_2 32 =$

b) $\log_3 81 =$

c) $\log_7(-49) =$

d) $\log_3 9 =$

e) $\log_{(-6)} 36 =$

f) $\log_5 1 =$

g) $\log 0.01 =$

h) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} =$

i) $\log_{35} 0 =$

27) Para seguir calculando….un poquito más complicados:

a) $\log_6 \frac{1}{36} =$ e) $\log_{36} 6 =$

b) $\log_{\frac{1}{5}} 125 =$ f) $\log_2 \sqrt{2} =$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 1 =$ g) $\log_{\sqrt{3}} 9 =$

d) $\log_{125} 5 =$ h) $\ln e^2 =$

28) En cada uno de los siguientes incisos, hallen el valor de “r”

a) $\log_r 16 = 2$ d) $\log_2 \frac{1}{8} = r$ g) $\log_{\sqrt{5}} r = 4$

b) $\ln r = 0$ e) $\log r = -3$ h) $\log_{\sqrt{7}} 7 = r$

c) $\log_2 r = 3$ f) $\log_5 1 =$ i) $\log_{(\sqrt{11})} r = 1$

2. ECUACIONES…FÓRMULAS…MODELOS MATEMÁTICOS

En esta sección repasaremos cómo resolver esas ecuaciones, cómo utilizar las fórmulas que ya conocemos y veremos que el álgebra nos permite modelizar situaciones de la vida real mediante ecuaciones.
Para tener éxito en la resolución de ecuaciones es fundamental comprender con claridad las operaciones con los números reales.

En diferentes ámbitos de la vida diaria de algunos profesionales, empresarios o simplemente de alguien que quiere comprar un determinado artículo, se puede encontrar con las siguientes situaciones:

Situación 1: Las empresas A y B producen ambas un total de 20 toneladas de un determinado producto a lo largo de un mes. Sin embargo, la empresa A produce 10 toneladas más que la empresa B en el mismo lapso de tiempo. ¿Cuánto es la producción de cada una de ellas?

Situación 2: Determinar el precio de equilibrio de un bien cuyas funciones de demanda y de oferta están dadas por $D(p) = 25 - 3p$ y $S(\mathrm{p}) = -5 + 2\,\mathrm{p}$, respectivamente. Calcular, además, la cantidad del bien demandada para dicho precio de equilibrio.

Situación 3: Si una tienda rebaja sus artículos un 24% ¿cuál sería el precio inicial de una prenda cuyo precio rebajado es de 38 pesos?

Situación 4: Un comerciante de verdura compra una cierta cantidad de tomates a 15 pesos el kilo. Se le echan a perder 3 kilos y el resto lo vende a 25 pesos el kilo. ¿Qué cantidad ha comprado si la ganancia obtenida es de 125 pesos?

Situación 5: Un empresario ha comprado un local rectangular por 259.200 pesos. Sabiendo que uno de los lados del local tiene una longitud igual a las tres cuartas partes del otro y que el precio del metro cuadrado es de 600 pesos, ¿Cuáles son las dimensiones del local?

La matemática, que muchos describen como el “lenguaje del universo”, nos otorga la posibilidad de describir, calcular y predecir el comportamiento del mundo que nos rodea para dar respuesta a estas situaciones u otras miles de preguntas que podemos plantearnos al observar nuestro alrededor.

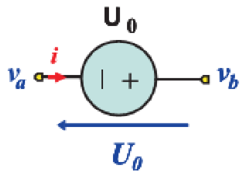
La representación de nuestra realidad, de forma simplificada y de diferentes maneras que nos ayuden a comprender su comportamiento, se realiza a través de modelos.

Un **modelo** es una representación gráfica, esquemática o analítica de una realidad, que sirve para organizar y comunicar de forma clara los elementos que la conforman y sus relaciones.

Los modelos constituyen la base para estudiar y entender problemas propios de muchas áreas: economía, ingeniería, medicina, química, física, psicología, etc.

- Un mapa es un modelo de la superficie de la Tierra.

  Un circuito electrónico que describe una fuente de voltaje es un modelo esquemático.



- Las réplicas de aviones, automóviles, barcos, e incluso de muñecos de superhéroes, pero en una escala mucho menor, son modelos de los mismos.

- Maquetas y planos de edificios, centros comerciales, casas o complejos de oficinas son modelos que se usan para ver exactamente como se verá la "estructura real" cuando se construya.

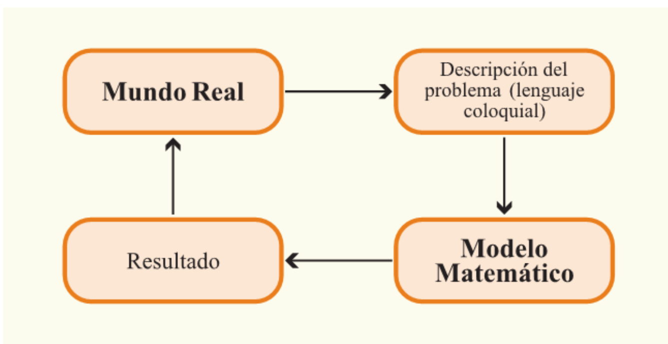
- Un modelo verbal es una narración con palabras que describe un paisaje o una compleja descripción de un negocio (relata y establece el escenario actual de la empresa, las metas y objetivos a seguir, etc.)

En muchas ocasiones, es de gran interés no sólo representar la situación sino el conocimiento de lo que ocurrirá en las mismas cuando las variables involucradas evolucionen. En general, a aquellas representaciones en las que se explicitan las relaciones entre las variables mediante **fórmulas**, **ecuaciones** y uso de números, se las denominan modelos matemáticos.

Un **modelo matemático** es la representación simplificada de la realidad, mediante el uso de funciones que describen su comportamiento, o de ecuaciones que representan sus relaciones.

Ante situaciones concretas como: el espacio recorrido por un móvil, el estiramiento de un resorte al aplicarle una fuerza o el aumento de temperatura de una sustancia al calentarla, entre otras, los científicos analizan cómo se vinculan las variables en juego y buscan fórmulas matemáticas que describan las relaciones que mantienen la misma regularidad. Cuando su relación se caracteriza por una velocidad de cambio constante, estamos en presencia de un modelo lineal.

Esquemáticamente:



2.1. ECUACIONES

Una **ecuación** es una proposición que muestra la igualdad entre dos expresiones algebraicas, donde una o varias cantidades son desconocidas.

La cantidad desconocida se llama **incógnita**. Cuando el valor desconocido es uno solo, la ecuación se dice con una incógnita. Es común que utilicemos la letra ***x*** para simbolizar la cantidad desconocida, aunque podemos usar cualquier letra del alfabeto.

"Algunos historiadores de la Matemática afirman que la letra x se usó como abreviatura de la palabra árabe *shei* (cosa), para nombrar las incógnitas.

Sin embargo, se considera que la notación algebraica moderna fue inventada en 1637, por el matemático francés René Descartes. En su obra, se representan las constantes con las primeras letras del alfabeto(a, b, c, etc.) y las variables o incógnitas, con las últimas(x, y, z).

Se cuenta que el editor que estaba imprimiendo el libro, debido a la gran cantidad de ecuaciones que tenía, le preguntó a Descartes si podía emplear esas últimas letras para las ecuaciones. Descartes le respondió que le resultaba indiferente qué letras utilizase. El editor eligió utilizar especialmente la x, porque en francés esa letra se utiliza poco." (Matemática 8 EGB3. Editorial Tinta Fresca).

Ejemplos: $2x + 8z = 1$ es una ecuación con dos incógnitas

$3^x + 2 = 4$ es una ecuación con una incógnita

$\frac{1}{4}t + 2 = 2t - 3$ es una ecuación con una incógnita

$\log(2r + 1) = 4$ es una ecuación con una incógnita

Resolver una ecuación significa encontrar **el o los valores** que puede "tomar" la/s incógnita/s de modo tal que la igualdad se verifique.

Al conjunto de valores que hacen que la ecuación se verifique se lo llama **conjunto solución** y puede estar formado por:

- Un solo elemento.

Ejemplo: $2x + 1 = -1$.Solo tiene solución para $x = -1$.Escribiremos$S = \{-1\}$.

- Tener un número finito de elementos

Ejemplo: $2x^2 + 2x - 4 = 0$. Solo tiene solución para $x = 1$ y $x = -2$. Escribiremos $S = \{1, -2\}$.

- Tener infinitos elementos.

Ejemplo: $2x = \frac{8}{4}x$, pues todo número real verifica esta igualdad. Escribiremos $S = \mathbb{R}$

- No tener elementos.

Ejemplo: $x^2 = -1$, pues no existe número real que elevado al cuadrado dé -1. Escribiremos $S = \emptyset$

La solución de una ecuación se **comprueba** reemplazando en cada miembro de la ecuación el/los valores que se supone son la solución. Si se llega a una proposición verdadera, la solución es correcta; si da lugar a una proposición falsa, entonces la solución o la comprobación son incorrectas y es necesario regresar para encontrar el error.

Ejemplo: 5 es la solución de la ecuación $x + 5 = 2x$. Para comprobarlo reemplazamos al 5 en cada miembro de la igualdad y vemos si se verifica la igualdad:

Tomo el primer miembro… $5 + 5 = 10$

Tomo el segundo miembro… $2 \cdot 5 = 10$

Como $10 = 10$ es una proposición verdadera entonces puedo afirmar que el conjunto solución es $S = \{5\}$.

Dos ecuaciones se dicen **equivalentes** si poseen el mismo conjunto solución.

Ejemplo: $4x + 2 = -2$ **y** $4x = -4$ son ecuaciones equivalentes pues ambas se verifican, únicamente, para $x = -1$.

Para obtener una ecuación equivalente a una dada, utilizamos las siguientes **propiedades de la igualdad.**

Sean a, b y c tres números reales cualesquiera,

- ✓ **Reflexiva:** $a = a$
- ✓ **Simétrica:** $a = b$ entonces $b = a$
- ✓ **Transitiva:** Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$
- ✓ **Uniforme:**
  - Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
  - Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Con el uso de estas propiedades, al momento de resolver una ecuación, podemos transformarla en otra ecuación equivalente que sea de más fácil resolución.

Nos limitaremos a trabajar con ecuaciones con una incógnita.

Resolución de ecuaciones de primer grado

Se llama ecuación de primer grado a aquella donde la incógnita aparece elevada a la potencia *uno*. También se las llama **ecuaciones lineales.**

Por ejemplo, $\frac{1}{5}x+1=-3$ es una ecuación lineal.

Para resolver una ecuación de este tipo se debe obtener, mediante la aplicación de propiedades de la igualdad y operando con los términos, una ecuación equivalente a la dada. Tratando en todos los casos de encontrar el/los valores de la incógnita.

Ejemplos:

1) Sea la ecuación: $3.(x-2)+1=2$

Resolución: $3.(x-2)+1=2$ (por prop.distributiva)

$3x-6+1=2$ (operando)

$3x-5=2$ (por prop. uniforme de la suma, sumamos 5 en cada miembro)

$3x-5+5=2+5$ (operando)

$3x=7$ (por prop. uniforme del producto, multiplicamos por $\frac{1}{3}$ en ambos miembros)

$\frac{1}{3}.3x=\frac{1}{3}.7$ (operando)

$x=\frac{7}{3}$

Conjunto solución: $S=\left\{\frac{7}{3}\right\}$ (Solución unitaria)

Al resolver una ecuación de la forma $ax=b$, con $a\neq 0$, la variable puede despejarse con los siguientes pasos:

* Multiplicar ambos lados de la ecuación por el **inverso multiplicativo o recíproco** de a, que es $\frac{1}{a}$, como se hizo en el ejemplo anterior o,

* Dividir ambos miembros de la ecuación por a.

Se pueden utilizar cualquiera de estos dos métodos para despejar la variable; sin embargo, si la ecuación contiene una o varias fracciones, se llegará con mayor rapidez a la solución multiplicando por el recíproco de a .

2) Sea la ecuación: $-10.x = 5.(6x - 8x)$

Resolución:

$-10.x = 5.(6x - 8x)$ (operando)

$-10.x = 5.(-2x)$

$-10.x = -10.x$ (por propiedad uniforme del producto)

$-10.x\left(-\frac{1}{10}\right) = -10.x\left(-\frac{1}{10}\right)$ (operando)

$x = x$

$\Rightarrow$ Conjunto solución: $S = \mathbb{R}$ (Solución infinita)

3) Sea la ecuación: $7x - 15 = 7.(2 + x)$

Resolución:

$7x - 15 = 7.(2 + x)$ (por propiedad distributiva)

$7x - 15 = 14 + 7x$ (por propiedad uniforme de la suma)

$7x - 15 - 7x = 14 + 7x - 7x$ (operando)

$-15 = 14$ ABSURDO!!!!!!

$\Rightarrow$ Conjunto solución: $S = \varnothing$ (Solución vacía)

Actividad 1:

* Al resolver la ecuación $6 = x - 4$ ¿qué es más conveniente, restar 6 o sumar 4 en ambos miembros de la ecuación para encontrar la solución? Explicar la respuesta.

* ¿$k = -1$ es solución de $-3(k-3) = -4k + 3 - 5k$? Justificar.
* ¿$p = 0$ es solución de $3p - 4 = 2(p+3) - 10$? Justificar.

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Se llama ecuación de segundo grado a aquella de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ❶, donde $a \neq 0$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Para resolver una ecuación de segundo grado, en algunos casos, igualamos a cero para llevar a la forma ❶; en otras ocasiones es conveniente omitir este paso.

Ejemplos:

1) Sea la ecuación: $3x^2 = 3$

Resolución: Como la variable aparece en un único término es término es posible "despejar" en forma directa

$3x^2 = 3$ (Por propiedad uniforme del producto)

$x^2 = \frac{3}{3}$ (Operando)

$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$ (Por propiedad de la radicación)

$|x| = 1$

$x = 1$ o $x = -1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Conjunto solución: } S = \{-1; 1\}}$

2) Sea la ecuación: $x^2 = -\frac{7}{3}x$

Resolución: $x^2 = -\frac{7}{3}x$

$x^2 + \frac{7}{3}x = 0$ (igualamos a cero)

$x\left(x + \frac{7}{3}\right) = 0$ (sacamos factor común x)

$x = 0$ ó $x + \frac{7}{3} = 0$ (por propiedad de números reales)

$x = 0$ ó $x = -\frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Conjunto solución: } S = \left\{0; \frac{7}{3}\right\}}$

Cuando la ecuación de segundo grado está completa, es decir, tiene los tres términos que aparecen en ❶ podemos aplicar la conocida fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}.$$

El conjunto solución de estas ecuaciones depende de cómo sea la expresión $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, llamada **discriminante.**

- Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ entonces el conjunto solución está formado por un único elemento (un número real).
- Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ entonces el conjunto solución está formado por dos elementos (dos números reales).
- Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ entonces el conjunto solución es vacío. No existe número real que satisfaga la ecuación.

Cuando el conjunto solución es no vacío la fórmula nos da a lo sumo dos soluciones reales: x_1, x_2 y la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se puede reescribir en forma factorizada de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

3) Sea la ecuación: $4x^2 + 8x - 12 = 0$

Resolución: $4x^2 + 8x - 12 = 0$

(como la ecuación es de la forma ❶ estoy en condiciones de resolver utilizando fórmula antes mencionada)

$$a = 4, \quad b = 8, \quad c = -12$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4.4.(-12)}}{2.4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 192}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{-8 \pm 16}{8}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 16}{8} = 1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-8 - 16}{8} = -3$$

Luego puedo escribir la ecuación: $4.(x-1).(x-(-3)) = 0$ la que se verifica para $x = 1$ o $x = -3$. Es decir, $S = \{-3;1\}$.

4) Sea la ecuación: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Resolución: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$a=1,\ b=-4,\ \ c=4$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.4}}{2.1}$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=2$$

Luego puedo escribir la ecuación: $(x-2)(x-2)=(x-2)^2=0$ la que se verifica para $x=2$ $S=\{2\}$

5) Sea la ecuación: $x^2-2x+6=0$

Resolución: $x^2-2x+6=0$

$$a=1,\ \ b=-2,\ \ \ c=6$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.6}}{2.1}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-24}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-22}}{2}$$

Pero como $b^2-4.a.c=-22<0$ el conjunto solución es vacío. $S=\varnothing$.

2.2. FÓRMULAS

La mayoría de las ciencias utilizan una gran variedad de fórmulas, veremos cómo evaluar una fórmula y cómo despejar las variables.

Una **fórmula** es una ecuación utilizada para expresar una relación matemática particular, por ejemplo, la fórmula de interés simple es:

$$interés = capital \cdot tasa\ de\ interés \cdot tiempo \quad \text{o bien, } i=p\cdot r\cdot t$$

Para **evaluar** una fórmula, sustituimos los valores numéricos de las variables y realizamos las operaciones indicadas.

Ejemplos:

1) Pedro pide un préstamo de \$100.000,00 a pagar en 3 años. El banco cobra una tasa de interés simple del 5% anual por el préstamo. ¿Cuánto deberá devolver al banco en concepto de capital más intereses?

* *Tratar de entender y traducir:*

Como el banco cobra interés simple, la fórmula a usar es $i=p\cdot r\cdot t$.

La tasa de interés es del 5% anual, es decir, $r = \frac{5}{100} = 0{,}05$

El capital p es \$ 100.000,00

El tiempo t es 3 años

* *Resolver*: $i = p \cdot r \cdot t$

$$i = 100.000{,}00 \cdot 0{,}05 \cdot 3 = 15.000{,}00$$

* *Revisar*: ¿Es lógica la respuesta? Si el interés es simple y la tasa anual es del 5%, en un año pagará \$ 5000 por lo que es lógico que en tres años pague \$ 15.000.-
* *Respuesta*: Dentro de tres años Pedro deberá devolver al banco \$ 115.000

2) Alicia tiene un velero pequeño y necesita reemplazar una vela triangular que está desgastada. Para comprar la vela necesita especificar las medidas de la base y de la altura de la misma. Mide la base y encuentra que tiene 5 pies. También recuerda que la vela tiene un área de 30 pies cuadrados. Cómo no quiere retirar la vela para medir su altura, emplea el álgebra para encontrar su medida. ¿Cómo habrá hecho?¿Cuál es la altura de la vela?

* *Tratar de entender y traducir:*
  Como la vela tiene forma triangular usamos la fórmula del área de un triángulo:
$$A = \frac{1}{2} b \cdot h$$
* *Calcular:* $30 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$
$$30 = \frac{5}{2} \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5} \cdot 30 = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot h \quad \Leftrightarrow 12 = h$$
* *Revisar:* Es lógico que la altura sea de 12 pies pues tiene que ser mayor que la base.
* *Respuesta:* La vela mide 12 pies de altura.

En este último ejemplo vimos que en la fórmula $A = \frac{1}{2} b \cdot h$, está despejado el área y que en realidad, tanto el área como la base son conocidas y la variable, o valor desconocido, es la altura. Por lo que, también podríamos haber despejado primero h y luego, reemplazamos los valores conocidos y calculamos.

Es decir, si $A = \frac{1}{2} b \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2A}{b} = h$

3) En un cierto año, se registraron en E.E.U.U. 1,2 millones de perros. La raza más popular fue el Labrador, con 172.841 registros. ¿Qué porcentaje de los registros fue dicha raza? Redondear a la décima más cercana.

* *Tratar de entender y traducir*
  La fórmula básica de porcentaje es $Base \cdot porcentaje = cantidad$
  La base es 1.200.000 perros
  172.841 son labradores
  Tengo que averiguar qué porcentaje representan los labradores sobre el total

* *Calcular:* $1.200.000 \cdot P = 172.841$

$$P = \frac{172.841}{1.200.000}$$
$$P \approx 0{,}144$$
$$P \approx 14{,}4\%$$

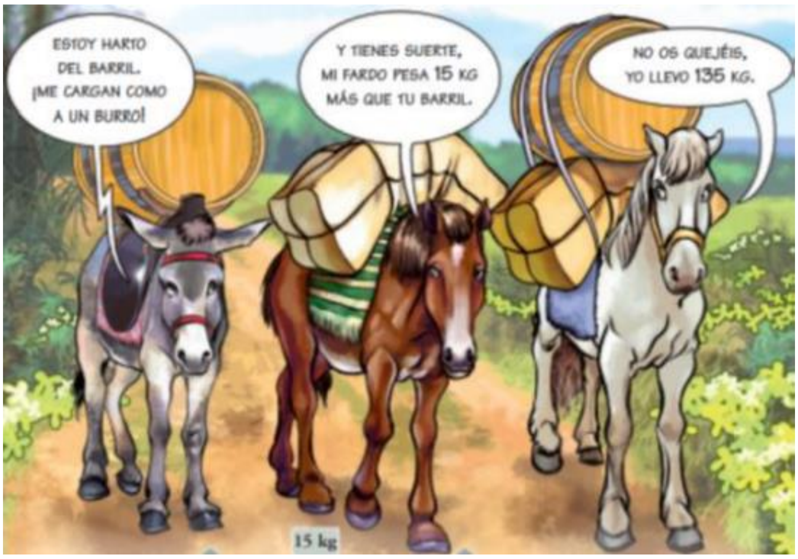
* *Revisar:* El 10% del total representa 120.000 perros así que parece lógico que 14,4% sea la respuesta.
* *Respuesta:* La raza Labrador representó aproximadamente el 14,4% de los registros.

2.3. MODELIZACIÓN

En el prólogo se presentó un procedimiento para resolver problemas. Ahora nos ocuparemos de aquellos problemas que se pueden traducir en ecuaciones.

Ejemplos:

1) Dada la siguiente situación, determinar cuánto pesa el barril y cuánto el fardo (Extraído de "Solución de problemas a través del descubrimiento. Método de George Polya" Socorro Calleja. Puebla, 2012).



* *Tratar de entender y traducir*: Debemos averiguar cuánto pesan el barril y el fardo y solo sabemos que juntos pesan 135 kg
  Llamaremos x: *barril*
  Sabemos que el fardo pesa 15 kg más que el barril, es decir, $x + 15$
  Sabemos que el barril más el fardo pesan 135 kg, es decir $x + (x + 15) = 135$
* *Calcular*: $x + (x + 15) = 135$

$$2x + 15 = 135$$
$$2x + 15 - 15 = 135 - 15$$
$$2x = 120$$
$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 120$$
$$x = 60$$

El fardo pesa $x + 15$, es decir, 75 kg

* *Respuesta:* El barril pesa 60 kg y el fardo, 75 kg.

2) Una empresa fabrica 1200 pares de zapatillas al mes. Quiere aumentar su producción a razón de 550 pares hasta alcanzar mensualmente los 4500 pares. ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar su meta de producción?

* *Tratar de entender y traducir*: La producción actual es de 1200 pares de zapatillas por mes. Se necesita conocer en cuántos meses (n) podrá alcanzar 4500 pares si aumenta la producción en 550 pares por mes, así $550n = incremento\ de\ la\ producción\ en\ n\ meses$.
* *Calcular*:

$$producción\ actual + incremento\ de\ la\ producción\ en\ n\ meses = producción\ futura$$
$$1200 + 550n = 4500$$
$$550n = 3300$$
$$n = \frac{3300}{550}$$
$$n = 6$$

* *Respuesta:* En 6 meses se alcanzará la producción deseada de 4500 pares.

Actividad 4: Un problema muy común donde debemos emplear ecuaciones para resolverlo es el siguiente:

Lucía y Esteban han ahorrado dinero durante un año. Lucía tiene en su alcancía la tercera parte del dinero que Esteban ha logrado guardar. Si entre los dos tienen 2400 pesos, ¿cuánto dinero ha ahorrado cada uno de ellos?

Encontrar dos ecuaciones distintas que modelicen este problema.

2.4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS

1) a) La solución de la ecuación $4x - 8 = 2x - (-x) - (-1)$ es:

- un número fraccionario y entero.
- un número entero y negativo.
- 9
- $\frac{9}{7}$
- ...ninguna de éstas.

b) La solución de la ecuación: $5x + 10x - 6 - 9 + 4x = x + 3 - 12$ es:

- 15
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{3}{2}$

- $-\left(\frac{2}{3}\right)$
- ninguna de éstas.

c) El valor de m que pertenece a $\mathbb{N}$ y que es solución de la ecuación

$m + 3(4m - 6) = -10 + 2(3m - 5)$ es:

- 0
- inexistente
- $-\left(\frac{2}{7}\right)$
- 2
- ninguna de éstas.

2) Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado y determinar la cantidad de elementos del conjunto solución:

a) $4 + x = \frac{1}{2}(15 + x)$

b) $3(x+9) = \frac{-5+18x}{6}$

c) $5t + 4 - t = 4(1 + t)$

d) $a - x = 3(x - a)$, siendo x la incógnita y a un número real fijo.

e) $(y - 1)(2 + y) = 5 - y(4 - y) - 2y$

f) $\frac{5}{2}a + 2 - \left(\frac{a-4}{3} + a + \frac{1}{6}\right) = 5a - \frac{2}{3}$

g) $y - 2 = 6(x + 4)$, siendo ambas, x e y, incógnitas.

3) Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones e identificar cuáles de ellas son equivalentes:

a) $\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

b) $\left(\frac{5}{6}x + 3\right)^2 = 5x + 8$

c) $-3(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$

d) $3x^2 + 3(3x - 1) = 2(3x + 2x^2) - 13$

e) $w^2 - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2} = 0$

f) $-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{3}{2}x - 5$

4) Resolver las siguientes ecuaciones, escribir el conjunto solución y escribirlas en forma factorizada:

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $-2x^2 + x = 10$

c) $3x^2 - 12x - 63 = 0$

d) $3x^2 = 12x - 12$

5) Responder:

a) ¿Es posible encontrar valores de x que satisfagan $(x + 3)(x - 3) = 5(x + 2) + 31$ y $\frac{3x+15}{4}=0$ al mismo tiempo?

b) ¿Es posible encontrar valores de t que satisfagan $8t^2 = -4t$ y $\frac{2t^2+2}{3}=\frac{4}{3}t$ a la vez?

6) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) El conjunto solución de la ecuación $\frac{2x^2-x}{x}=-15$ está dado por $\{0, -7\}$.

b) El par $(x, y) = (5, 2)$ es solución de la ecuación $3x^2 - 2y = 51 + 10y$.

c) Las ecuaciones $\frac{(a+3)^2}{a+3}=0$ y $a+3=0$ son equivalentes.

d) 1 es la única solución de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

7) Responder:

a) El costo total de una cena fue de \$ 970. Esto incluyó una propina del 15% calculada sobre el costo de la cena después de un impuesto sobre las ventas del 6%. Calcular el costo de la cena antes de la propina y del impuesto.

b) Un estudiante respondió correctamente 72 de 80 preguntas en un examen. ¿Qué porcentaje de preguntas respondió correctamente?

c) Un comerciante decide incrementar 10% el precio original de cada artículo que vende. Después del incremento en el precio, el comerciante observa una disminución significativa de las ventas, así que decide reducir 10% el precio actual de cada artículo. ¿Los precios han vuelto a los precios originales? De no ser así, ¿los precios son más altos o más bajos que el precio original?

d) Si una cantidad se incrementa 100% ¿cuántas veces es el nuevo valor de su valor original?

8) Resolver los siguientes problemas:

a) El empleado de una inmobiliaria alquiló dos departamentos y recibió comisiones por un total de \$ 6000,00. La comisión sobre una de los departamentos fue una y media veces la comisión sobre el segundo. ¿Cuál fue la comisión que el empleado cobró sobre cada departamento?

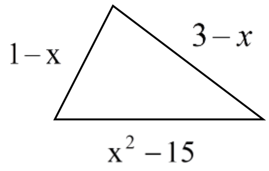
b) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después, la tercera parte del resto y quedan aún 1.600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

c) Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que su producto sea 255.

d) Un poste de luz de 7 m. se rompe y al doblarse, la punta de la sección rota toca el suelo a 3 m. de la base del poste. ¿A qué altura se rompió? (Ayuda: utilizar el Teorema de Pitágoras).

e) Pienso un número, le sumo 5, a este resultado lo multiplico por 3 y el nuevo resultado lo divido por 10. Obtengo así 6. ¿Qué número pensé?

f) El perímetro del siguiente triángulo es 24 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados?



g) Un rectángulo tiene por dimensiones el triple y el quíntuplo del lado de un cuadrado. Calcula las dimensiones de ambos cuadriláteros, sabiendo que la diferencia entre sus áreas es de 2015 cm².

3. TRIGONOMETRÍA

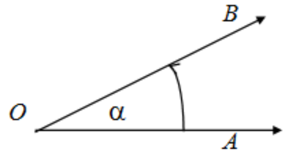
(Este material fue elaborado por las profesoras Claudia Garelik y María Elena Ruiz)

3.1. MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Ángulos dirigidos y orientados

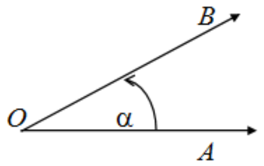
Consideremos en el plano un punto *O* y dos semirrectas con origen en dicho punto.

📖 Todo ángulo se considera generado por una semirrecta móvil que gira sobre su origen, supuesto fijo. Llamamos ángulo orientado $A\hat{O}B$ al ángulo generado por la rotación, en sentido contrario por las agujas del reloj, de la semirrecta *OA* hacia la posición de la semirrecta *OB*.

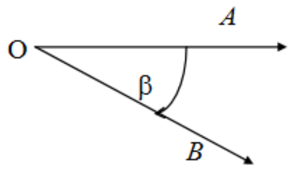


Como observamos en la figura, $\hat{\alpha}$ resulta generado por la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ cuando gira sobre su origen y ocupa la posición final $\overrightarrow{OB}$.

📖 Un ángulo se define con signo positivo si es generado por una semirrecta móvil que gira en sentido opuesto al movimiento de las agujas de un reloj. En caso contrario, se define como negativo.



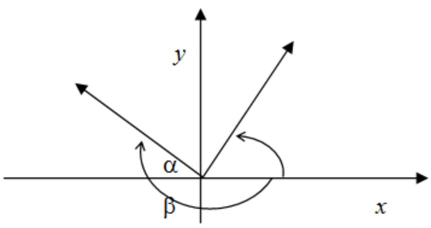
$\alpha > 0$



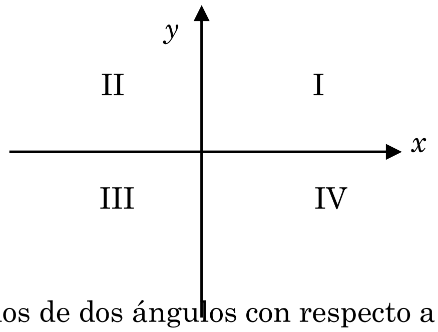
$\beta < 0$

Ángulos centrados

📖 Dado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de centro *O*, llamamos **ángulo centrado** a todo ángulo orientado con vértice en *O*, cuya semirrecta inicial coincida con el semieje positivo de las abscisas.



Observación: los ejes x e y dividen al plano en cuatro cuadrantes.

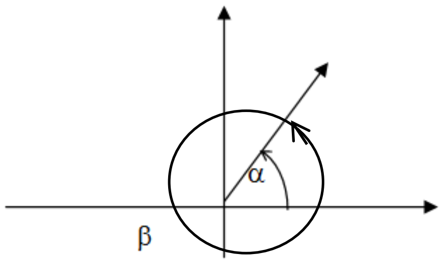


Ángulos congruentes

Cuando coinciden los lados de dos ángulos con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, dichos ángulos son **congruentes**.

Los ángulos α y β son congruentes.

$\hat{\beta} = \hat{\alpha} + 1giro$



Los ángulos congruentes difieren en un número entero de giros:

$$\hat{\beta} \cong \hat{\alpha} \text{ si } \quad \hat{\beta} = \hat{\alpha} + k \text{ giros}, k \in Z$$

3.2. SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Trabajaremos con dos sistemas de medición: sexagesimal y circular o radial.

Sistema Sexagesimal

Su unidad de medida es el **grado sexagesimal (1 º)** que se obtiene si se divide al ángulo recto en 90 partes congruentes:

$$1^{\circ} = \frac{1R}{90} \qquad 1 \text{ recto } = 90 \text{ grados} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{1\ R = 90°}$$

Si al grado se lo divide en 60 partes iguales se obtiene el **minuto sexagesimal**:

$$1' = \frac{1^{\circ}}{60} \qquad 1 \text{ grado} = 60 \text{ minutos} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{1° = 60'}$$

Si al minuto se lo divide en 60 partes iguales se obtiene el **segundo sexagesimal**:

$$1'' = \frac{1'}{60} \qquad 1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{1' = 60''}$$

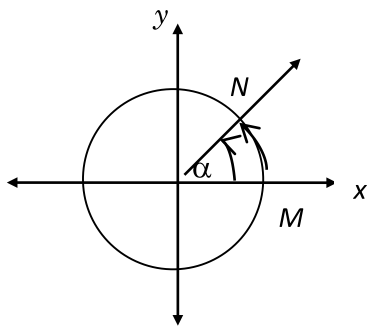
Así, el **ángulo llano** mide 180º y el **ángulo de un giro** mide 360º.

Sistema circular o radial

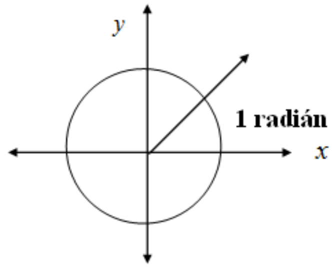
Ahora consideraremos un sistema de ejes coordenados cartesianos, por lo que quedan determinados cuatro ángulos rectos.

Dado que cada uno mide 90°**,** cualquier circunferencia *C*, con centro en el origen del sistema coordenado cartesiano, tiene un ángulo central de 360°.

El ángulo α determina sobre *C* un arco de circunferencia *MN* (tiene el mismo sentido que el ángulo α). Como para cada arco orientado existe un número real que es su longitud, podemos asignar a cada ángulo centrado la longitud del arco que determina, siempre con el signo que corresponda, siendo la longitud de ese arco la medida en radianes del ángulo.

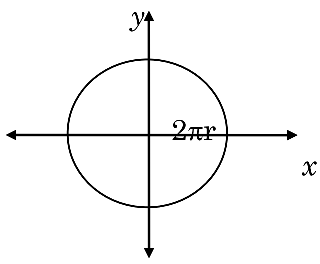


Si tomamos la medida del radio y la transportamos sobre la circunferencia, el ángulo correspondiente a esa longitud de arco igual al radio, recibe el nombre de **radián**; éste es la unidad de medida de otro sistema de medición de ángulos llamado **sistema circular o radial.**



🕮 Por lo tanto, el **radián**, es el ángulo central que corresponde a un arco de circunferencia de igual radio que la misma.

Se demuestra que el radio está contenido 2π veces en la circunferencia y por lo tanto divide al ángulo central de la misma en 2π radianes.



De allí que podemos establecer la siguiente equivalencia entre este sistema y el sistema sexagesimal.

Sist. Radial	**Sist. Sexagesimal**
2π radianes	360°
π rad.	180°
$\frac{\pi}{2}$ rad.	90°
$\frac{\pi}{3}$ rad.	60°
$\frac{\pi}{4}$ rad.	45°
t rad.	x °

Para pasar del sistema sexagesimal al radial el razonamiento es:

180° ______________ π rad.

x ° ______________ t rad. $\Rightarrow$ $t = x°.\dfrac{\pi}{180°}$

Ejemplos:

1. Expresar en radianes un ángulo de 51°20'.

51°20' = 51,33333... °

180° ______________ π rad

51,33333...° ______________ t rad. $\Rightarrow$ $t = 51{,}33333°.\dfrac{\pi}{180°} = 0{,}895935$

51°20' = 0,895935 rad.

2. Expresar en grados sexagesimales un ángulo de 2,5 radianes

$$2{,}5\,\text{rad} = \frac{180^0}{\pi\,\text{rad}} \cdot 2{,}5\,\text{rad} \cong \frac{180^0 \cdot 2{,}5\,\text{rad}}{3{,}1416\,\text{rad}} \cong \frac{375^0}{2{,}618} = 143^0\ 14'\ 20''$$

Actividad 1: Expresar en radianes cada uno de los siguientes ángulos:

a) $\hat{\alpha} = 60°$ **c)** $\hat{\alpha} = 90°$ **e)** $\hat{\alpha} = 210°$ **g)** $\hat{\alpha} = 57°$
b) $\hat{\alpha} = 45°$ **d)** $\hat{\alpha} = 270°$ **f)** $\hat{\alpha} = 360°$ **h)** $\hat{\alpha} = 133°$

Actividad 2: Expresar en grados, minutos y segundos, cada uno de los siguientes ángulos:

a) $\hat{\beta} = \frac{\pi}{2}\ rad$ **c)** $\hat{\beta} = -\frac{\pi}{6}\ rad$ **e)** $\hat{\beta} = \frac{3}{4}\pi\ rad$

b) $\hat{\beta} = \frac{2}{5}\ rad$ **d)** $\hat{\beta} = -\frac{4}{3}\ rad$ **f)** $\hat{\beta} = -\frac{2}{3}\pi\ rad$

Actividad 3: Expresar en radianes:

a) $\hat{\alpha} = 57°17'44''$ **b)** $\hat{\beta} = 81°20'$ **c)** $\hat{\gamma} = 15°18'10''$

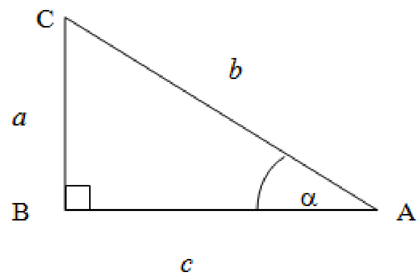
Actividad 4:

a) El minutero de un reloj mide 12 cm. Qué distancia recorre la punta del minutero durante 20 minutos?

b) Un ángulo central determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 30 cm de radio. Expresar el ángulo central en radianes y en grados.

3.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

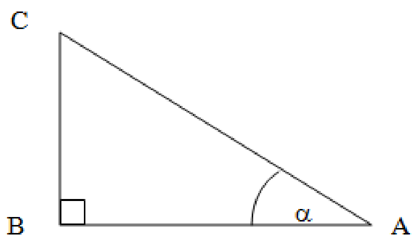
El teorema de Pitágoras relaciona los catetos de un triángulo rectángulo con su hipotenusa de la siguiente manera:



$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \quad \text{ó}$$
$$b^2 = a^2 + c^2$$

Ahora definiremos relaciones que vinculan dos de los lados de un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos.

Construimos, entonces, sobre un ángulo agudo α un triángulo rectángulo ABC



$$\text{seno de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Leftrightarrow sen\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\text{coseno de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\text{tangente de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow tg\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\text{cotangente de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow ctg\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\text{secante de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow \sec\hat{\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\text{cosecante de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow \operatorname{cosec}\hat{\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Estas razones se denominan **razones trigonométricas** del ángulo α, o también **relaciones trigonométricas.**

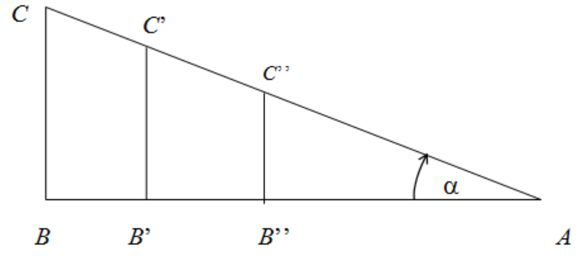
También se puede definir la **relación pitagórica:**

$$sen^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\alpha} = 1$$

La razón trigonométrica es la comparación por cociente de dos magnitudes de la misma especie que da por resultado un **número abstracto.**

- Cabe preguntarse si, en lugar de trazar un único triángulo rectángulo sobre $\hat{\alpha}$ se trazaran más, las razones trigonométricas que se obtendrían serían o no las mismas.

Analicemos lo siguiente:



$$\text{En } A\overset{\Delta}{B}C \qquad sen\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\text{En } A\overset{\Delta}{B'}C' \quad sen\hat{\alpha} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}}$$

$$\text{En } A\overset{\Delta}{B''}C'' \quad sen\hat{\alpha} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{AC''}}$$

Pero como $A\overset{\Delta}{B}C, A\overset{\Delta}{B'}C', A\overset{\Delta}{B''}C''$ son semejantes, se verifica que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{AC''}}$$

Por lo tanto es indiferente calcular el seno de $\hat{\alpha}$ sobre cualquiera de los triángulos.

Lo mismo es válido para las otras razones trigonométricas.

Una razón trigonométrica cambia de valor si cambia el ángulo sobre el cual se calcula, es decir que las razones trigonométricas dependen del valor del ángulo.

Ejemplo:

$$\text{sen } 35° \cong 0{,}572$$

$$\cos 35° \cong 0{,}818$$

$$\text{tg } 35° \cong 0{,}700$$

Problema inverso: Dado el número trigonométrico, calcular el ángulo.

Ejemplo:

$sen\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = arcsen\frac{1}{2}$ (se lee: α es el ángulo o arco cuyo seno vale ½)

$$\alpha = 30°$$

Resolución de triángulos rectángulos

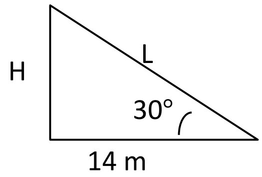
Resolver un triángulo rectángulo consiste en calcular los valores de los lados y ángulos desconocidos en función de los que se conocen. Para ello es indispensable conocer dos elementos entre los cuales figure un lado.

Ejemplo: El techo de un quincho forma un ángulo de 30° con la horizontal. El quincho tiene 14 ms de fondo.

a) ¿Cuál es la longitud del techo?

b) ¿Cuál es la altura que alcanza?

Primero, tratemos de armar el modelo matemático.



Para calcular la longitud del techo podemos utilizar la razón trigonométrica que nos plantea la relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$cos30° = \frac{14m}{L} \Rightarrow L = \frac{14m}{cos30°} \Rightarrow L \cong 16{,}16m$$

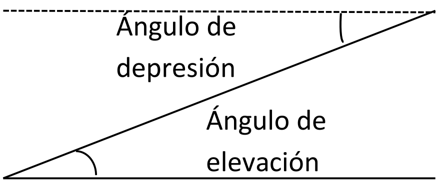
Así, la longitud del techo es de aproximadamente 16,16 m.

Ahora, la longitud del techo se calcula utilizando otra de las razones trigonométricas.

$$tg30° = \frac{H}{14m} \Rightarrow H = tg30° \cdot 14m \Rightarrow H \cong 8{,}08m$$

Así, la altura que alcanza el quincho es de aproximadamente 8,08m.

Para tener en cuenta: Los ángulos formados con la horizontal se llaman:



Actividad 5: Desde el camino, situado en una línea horizontal a 452 m de la base de un edificio, si miramos hacia el último piso del mismo, el ángulo de elevación es de $32°10'$. Calcular la altura del edificio.

3.4. ACTIVIDADES PRÁCTICAS

1) a) ¿Qué determina que un ángulo orientado tenga sentido positivo? Dar 2 ejemplos.
b) ¿Qué determina que un ángulo orientado tenga sentido negativo? Dar 2 ejemplos.

2) Completar:
Se dice que un ángulo está centrado con respecto un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales si:

- Su vértice ……………………………………………………………………………………..
- La semirrecta inicial……………………………………………………………………………..
- El plano cartesiano queda dividido en ………………………………… donde se localizará la semirrecta móvil.

3) Dibujar los siguientes ángulos y determinar en qué cuadrante se encuentran:

$\hat{\alpha} = 30°$ $\hat{\beta} = 135°$ $\hat{\gamma} = -60°$

$\hat{\delta} = 750°$ $\hat{\theta} = 240°$ $\hat{\varphi} = -225°$

4) a) Completar: Si dos ángulos orientados en un sistema cartesiano tienen sus lados coincidentes se llaman ángulos………………………… La diferencia entre ambos será siempre de …………………………..

b) Dado $\hat{\vartheta} = 30°$, encontrar dos ángulos congruentes con ϑ, uno con sentido positivo y otro, con sentido negativo.

c) Encontrar el ángulo α , $0° \leq \alpha \leq 360°$, que sea congruente con $\hat{\beta} = 1290°$.

5) Encontrar la medida en radianes de los ángulos cuya medida en grados es:

a) $\hat{\alpha} = 150°$ b) $\hat{\beta} = -60°$ c) $\hat{\gamma} = 225°$

d) $\hat{\delta} = 450°$ e) $\hat{\theta} = 54°$

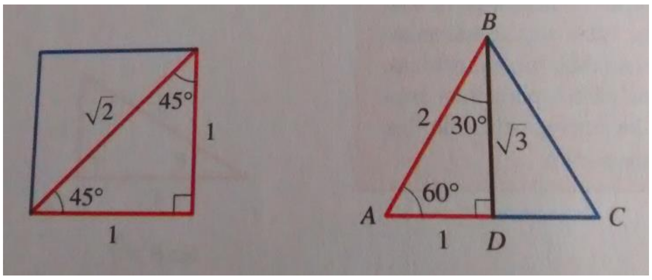
6) Encontrar la medida en grados de los ángulos cuya medida en radianes es:

a) $\hat{\alpha} = \frac{2}{3}\pi$ b) $\hat{\beta} = -\frac{3}{4}\pi$ c) $\hat{\gamma} = \frac{11}{6}\pi$

d) $\hat{\delta} = 5\pi$ e) $\hat{\theta} = \frac{\pi}{9}$

7) Si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, bosquejar un triángulo rectángulo con ángulo agudo α y encontrar $sen\alpha$ y $tg\alpha$.

8) Usar ambos triángulos rectángulos para completar la siguiente tabla:



θ en grados	30º	45º	60º
θ en radianes			
$sen\ \theta$			
cos θ			
tg θ			

9) Con una escalera de 5,8 m de largo necesitamos alcanzar una lámpara que se encuentra en una pared a 4 m de altura.

a) Dibujar el modelo.

b) ¿Cuál es el ángulo de inclinación que le daremos a la escalera?

c) ¿A qué distancia de la pared debemos colocar el pie de la escalera?

10) Calcular la altura de una antena utilizada en un sistema de comunicación sabiendo que su sombra mide 238 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 40° con el suelo.

11) Desde el patio de una casa y a una distancia de 15m de la misma, una persona calculó en 23° el ángulo de elevación hacia el extremo superior de una antena ubicada en el techo de la casa. Luego midió el ángulo de elevación, desde la misma posición anterior, hasta el techo de la casa y resultó de 18°.

a) ¿Cuál es la altura de la antena?

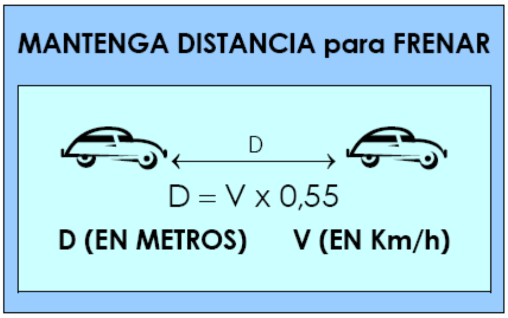
b) ¿Qué distancia hay desde el techo hasta donde el observador realizó las mediciones?

12) Un hombre trata de cruzar nadando un río, en línea recta y en forma perpendicular, desde una orilla hasta la otra. La corriente lo desvía alejándolo 50 m del punto donde quería llegar. Si el ancho del río es de 100 m, ¿con qué ángulo se desvía?

4. FUNCIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

- En diferentes tramos de la multitrocha de la ruta 22 que une las ciudades de Neuquén y Plottier se está evaluando colgar este cartel:



¿Cómo interpretarían la **fórmula**? ¿Qué distancia debe conservar un automovilista que va a 100 km/h?

¿Les parece que los conductores respetarán lo que indica el cartel?

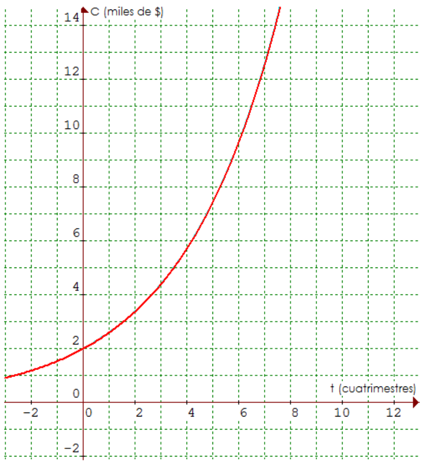
- Una revista especializada informa mediante una **tabla** las distancias de frenado de un automóvil moderno:

Velocidad (km/h)	Distancia de frenado (m)
40	7,30
60	14,80
80	20
100	41
120	60,80

Si analizan esta tabla podrán convencerse por qué a altas velocidades es fundamental respetar el cartel anterior ¿verdad?

- Cambiemos el vértigo de las rutas por el de la economía:

Si invertimos $2.000 en un banco que ofrece una tasa de interés del 7% anual, el modelo que nos permite obtener el capital final en cada tiempo *t* se puede representar mediante este **gráfico**.



Observando el gráfico respondan: ¿cuánto tiempo necesitaremos dejar depositado nuestro dinero para duplicar el capital inicial?

- ¿Cruzamos la cordillera?

Cuando en un terremoto las rocas se fracturan, la energía elástica almacenada en ellas se libera bruscamente.

Los científicos "no pueden vivir" sin manejar "fórmulas extrañas", fíjense como calculan la energía liberada durante un terremoto utilizando la siguiente fórmula:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot M$$

Siendo, **E** la energía elástica expresada en ergios y **M** la magnitud del terremoto en escala Richter.

El terremoto en Chile en febrero del 2010 fue de una magnitud de 8,8 en escala Richter. Para calcular la energía que se liberó procedemos así:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 8{,}8 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad E = 10^{25} \textit{ ergios}$$ ¿Mucha energía no?

Gráficos, tablas y fórmulas *son algunas de las maneras de representar* ***funciones****.*
Dedicaremos esta unidad a descubrir qué son, cuáles son sus características, cómo se clasifican.

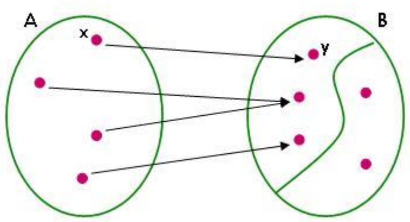
4.2. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Cuando en la introducción analizamos el cartel de la multitrocha habrán descubierto que la distancia que se debe mantener **depende** de la velocidad del vehículo; en el caso de la energía liberada durante un terremoto, la misma **depende** de la magnitud del terremoto en escala Richter. En el primer caso se dice que la distancia está en **función** de la velocidad; en el segundo la energía liberada está en **función** de la magnitud del terremoto.

Podría decirse que una función es algo así como una "ley" que regula la **relación de dependencia** entre cantidades u objetos **variables**.

Una función ***f*** queda definida por:

- ✓ Un conjunto A llamado **dominio**.
- ✓ Un conjunto B llamado **codominio**.
- ✓ Una **ley** que asocia a cada elemento ***x*** del conjunto A un **único** elemento ***y*** del conjunto B.



x es la variable independiente.
y es la variable dependiente.

La función relaciona variables (números u objetos) de manera tal que se **cumplan** dos condiciones:

- ✓ **Existencia** (para cada valor de *x* **existe** un valor de *y*)
- ✓ **Unicidad** (a cada valor de *x* le corresponde un **único** valor de *y*)

📖 **Definición:** Decimos que *f* es una función de un conjunto A en otro conjunto B y escribimos $f: A \to B \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A\, \exists\, \text{un único } y \in B \,/\, f(x) = y.$

¡No toda relación entre variables es función!

Ejemplos:

1) La relación que a cada argentino le hace corresponder su número de DNI es función, porque a todos y cada uno de los argentinos **(condición de existencia)** le corresponde un único DNI **(condición de unicidad).**

2) No es función la relación mujer – hijo. ¿Por qué?...porque no toda mujer tiene hijos (**condición de existencia)**, y existen mujeres que tienen más de un hijo **(condición de unicidad)**.

3) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

a) La relación "es múltiplo de" establecida de A en B no es función porque no se cumple la condición de unicidad. Por ejemplo al elemento 4 del conjunto A (dominio) le corresponde tres elementos ("1", "2" y "4") del conjunto B (codominio).

b) La relación "es múltiplo impar de" establecida de A en B no es función porque no se cumple ni la condición de unicidad ni la de existencia. Por ejemplo al elemento "2" del conjunto A no le corresponde ningún elemento del conjunto B **(condición de existencia)**; y al elemento "3" del conjunto A le corresponden dos elementos ("1" y "3") del conjunto B **(condición de unicidad).**

4.3. DOMINIO, CODOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

📖 El conjunto de los valores *que puede tomar* la variable independiente se denomina **Dominio** de la función. Y se escribe *Dom (f)* o D_f.

📖 El conjunto que *contiene* a todos los valores que puede tomar la función se denomina **Codominio** de la función.

📖 El conjunto de los valores *que toma* la variable dependiente se denomina **Imagen** de la función. Observen que la imagen *está contenida* en el codominio. Y se escribe *Im(f)* o I_f.

En general, vamos a trabajar con funciones donde el dominio y codominio son conjuntos numéricos.

Dominio de funciones definidas por fórmulas

Analicemos el dominio de las siguientes funciones numéricas:

- $f(x)=3x-7$

La fórmula que define a la función f plantea como cálculo operaciones posibles para cualquier valor de la variable independiente x. Por lo tanto $Dom(f)=\mathbb{R}$.

- $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Como la división por 0 no está definida, el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales distintos de 0. Simbólicamente: $Dom\ (g)=\mathbb{R}-\{0\}$.

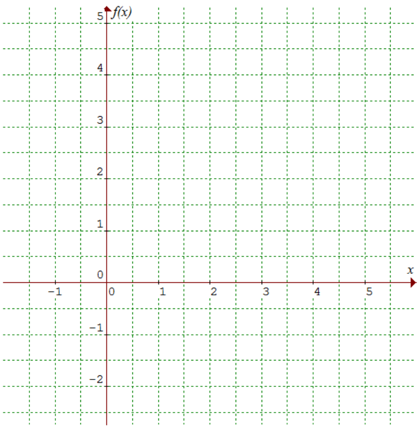
- $h(x)=\sqrt{x+4}$

Sabemos que en el conjunto de los números reales la raíz cuadrada de un número negativo no existe. En consecuencia, para la función h los valores posibles para x serán todos los números reales mayores o iguales a –4. Simbólicamente $Dom(h)=[-4\ ;\ +\infty)$

Tal como lo hicimos en este ejemplo, es muy usual llamar ***y*** al valor que le corresponde a ***x*** a través de una función. Por este motivo, cuando se define una función a través de su fórmula se usa indistintamente $f(x)$ *o* y.

Igual fórmula y distinto dominio

Consideremos la función definida por la fórmula $f(x)=\dfrac{1}{2}x$

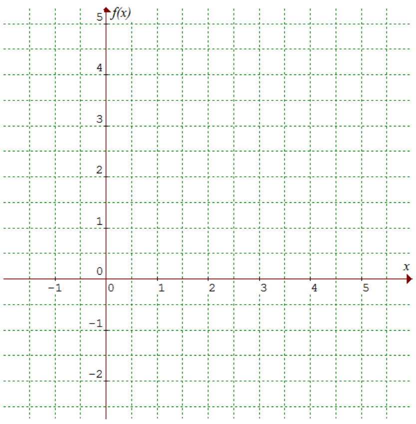


1) Si consideramos que esta fórmula representa el costo neto de producción para una cierta cantidad x de lápices producidos, ¿cómo sería su representación gráfica?

En esta situación particular la función se define sólo para números naturales, ¿por qué?

Consideraremos entonces: $Dom(f)=\mathbb{N}$

Con la ayuda de una tabla construir el gráfico para una producción de hasta 5 lápices.



2) ¿Cuál es el gráfico si consideramos que esta función representa la posición de un objeto que se mueve a velocidad constante durante un cierto período de tiempo?

Definir en términos del problema las variables independiente y dependiente.

¿Cuál es el dominio de *f*? Construir el gráfico correspondiente.

En los dos casos planteados anteriormente se puede observar que una misma fórmula describe funciones con dominios diferentes.

4.4. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES

Conjuntos de números reales: Intervalos

Los intervalos son conjuntos de números reales definidos de la siguiente manera:

- Cerrados
  $[a\,;b] = \{x/x \in \mathbb{R}\ \ y\ \ a \le x \le b\}$

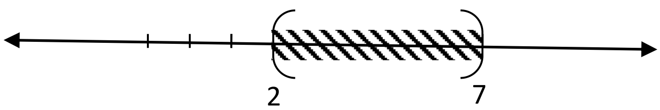
- Semiabiertos

  $(a\,;\ b] = \{x/x \in \mathbb{R}\ \ y\ \ a < x \le b\}$ $\qquad$ $(-\infty\,;\ b] = \{x/x \in \mathbb{R}\ \ y\ \ x \le b\}$

  $[a\,;\ b) = \{x/x \in \mathbb{R}\ \ y\ \ a \le x < b\}$ $\qquad$ $[a\,;\ +\infty) = \{x/x \in \mathbb{R}\ \ y\ \ x \ge a\}$

- Abiertos
  $(a\,;b) = \{x/x \in \mathbb{R}\ \ y\ \ a < x < b\}$ $\qquad$ $(a\,;\ +\infty) = \{x/x \in \mathbb{R}\ \ y\ \ x > b\}$

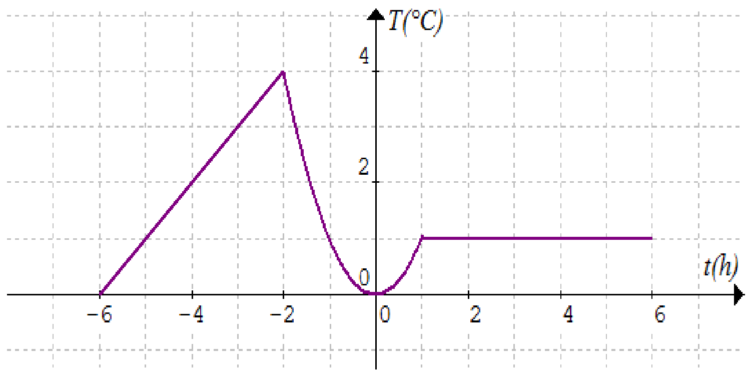
Por ejemplo, $(\,2\,;7)$ es el conjunto de todos los números reales entre 2 y 7 si lo representamos en la recta numérica:



Crecimiento y decrecimiento de funciones

Para evaluar la temperatura en cada tiempo t (en hs) de una cámara en donde se guardaron semillas de maíz se realizaron registros de la temperatura (en °C) de la misma en forma continua, desde las 6 de la tarde de un día y durante las primeras 6 hs del día siguiente.

Para resolver esta situación se puede considerar el gráfico de la función:



Para los registros de temperatura observamos cuatro situaciones bien diferentes en la evolución de la temperatura a medida que transcurre el tiempo:

- Hasta dos horas antes de la medianoche, es decir $-6 < t < -2$, la temperatura fue aumentando. ¿Cuál fue la máxima temperatura alcanzada?;
- Luego, y hasta la medianoche, $-2 < t < 0$, la temperatura fue disminuyendo. ¿Cuál fue la mínima temperatura alcanzada?;
- Entre la medianoche y la hora 1, es decir $0 < t < 1$, la temperatura volvió a aumentar, hasta llegar a los 1°C;
- A partir de la hora 1 y hasta finalizar la observación, es decir $1 < t < 6$, se registró una temperatura constante. ¿De cuántos grados fue esa temperatura constante?

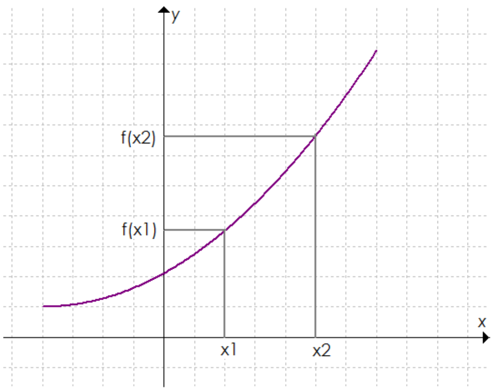
Las anteriores observaciones se traducen en lenguaje matemático de la siguiente forma:

- para $t \in (-6,-2)$, la función es **creciente**,
- para $t \in (-2,0)$, la función es **decreciente**,
- para $t \in (0,1)$, la función es **creciente**,
- para $t \in (1,6)$, la función es **constante**.

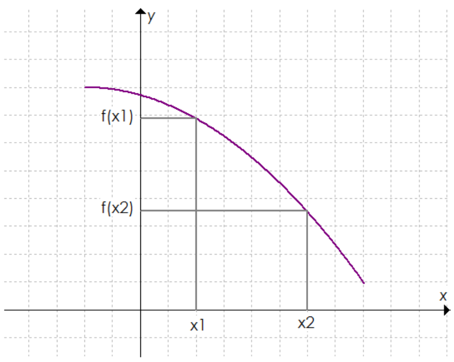
Definición:

- ✓ Una función ***f*** se dice **constante** en un intervalo $\mathrm{I} \subseteq Dom(f)$ si $\forall\ x \in \mathrm{I}$ es $f(x) = c$ donde c es un número real.
- ✓ Una función ***f*** se dice **creciente** en un intervalo $\mathrm{I} \subseteq Dom(f)$ si $\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ con $x_1 < x_2$ $\Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$.
- ✓ Una función ***f*** se dice **decreciente** en un intervalo $\mathrm{I} \subseteq Dom(f)$ si $\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ con $x_1 < x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)$.

Gráficamente:



función creciente



función decreciente

Ejemplos:

Siempre son crecientes las funciones que describen situaciones como:

- La altura de una planta a medida que transcurren los días posteriores a la siembra;
- El monto de una inversión, colocada a interés compuesto en un banco, a medida que transcurre el tiempo;
- El perímetro de una circunferencia como función de la medida de su radio.

Siempre son decrecientes las funciones que describen situaciones como:

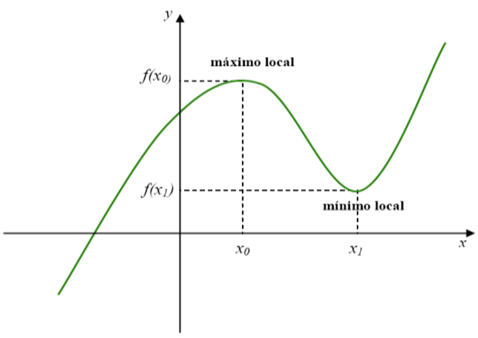
- El interés que debe pagarse por un crédito amortizado según el sistema francés, a medida que transcurre el tiempo.
- El esfuerzo que debe realizarse para levantar un peso mediante el uso de una palanca cada vez que se amplía un brazo de la misma.

4.5. MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES Y ABSOLUTOS

Máximos y mínimos locales (o relativos)

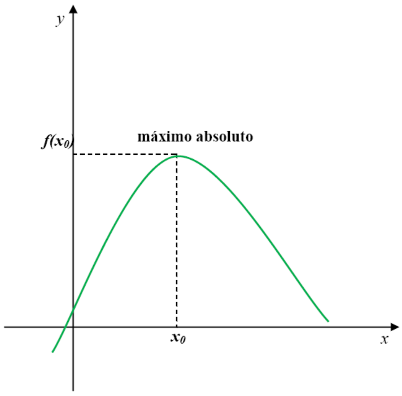
📖 ***f*** alcanza un **máximo local** en x_0 si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos "próximos" a x_0, es decir, si $f(x_0) \geq f(x)$ para los valores de x "cercanos a x_0"

📖 ***f*** alcanza un **mínimo local** en x_1 si $f(x_1)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos "próximos" a x_1, es decir, si $f(x_1) \leq f(x)$ para los valores de x "cercanos a x_1".

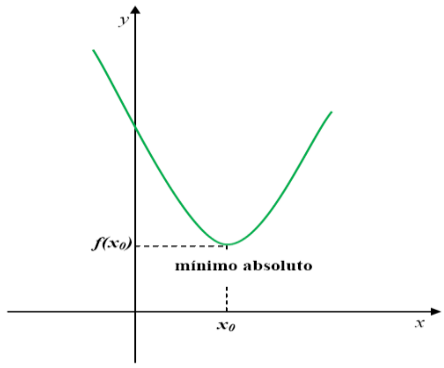


Máximos y mínimos absolutos

📖 ***f*** alcanza un **máximo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio, es decir, si $f(x_0) \geq f(x)$ para cualquier x del dominio de f

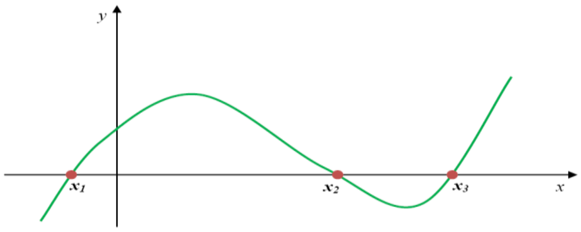


📖 ***f*** alcanza un **mínimo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio, es decir, si $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier x del dominio de f



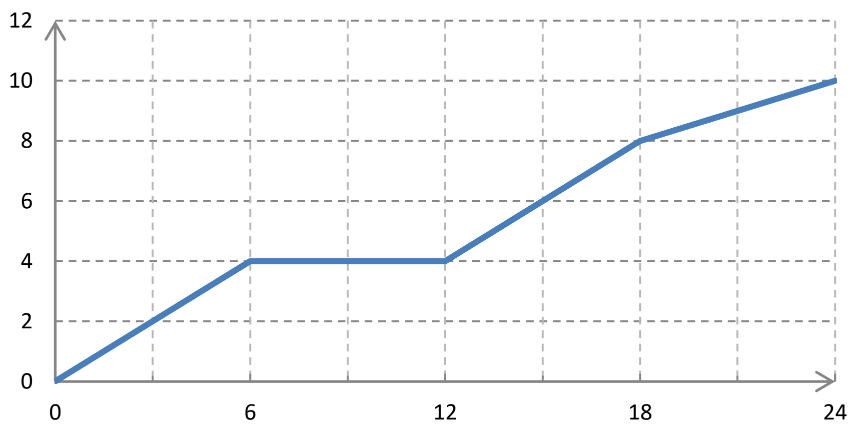
4.6. CEROS O RAÍCES

📖 $x_0 \in Dom(f)$ es raíz de f si y solamente si $f(x_0) = 0$



4.7. ACTIVIDADES PRÁCTICAS

1) Carolina y Sabrina trabajan en la misma empresa. Carolina tiene auto y suele pasar a buscar a Sabrina para ir juntas a trabajar. Observen el gráfico que muestra cómo varía la distancia recorrida por Carolina desde que sale a su casa hasta que llega a la empresa, y contesten a las preguntas.

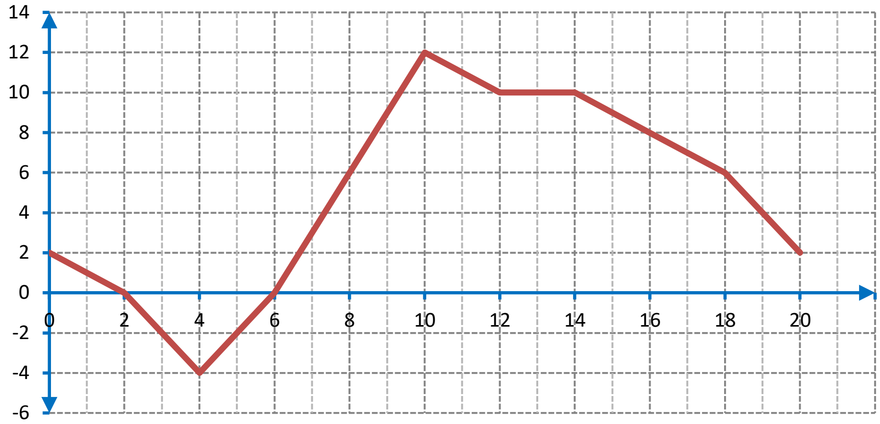


a) ¿Qué variable se mide en cada eje de coordenadas?
b) ¿Cuánto tarda en llegar a la casa de Sabrina?
c) ¿A qué distancia de la casa de Carolina se encuentra la casa de Sabrina?
d) ¿Cuánto tiempo la espera?

e) En que parte del trayecto van más rápido porque utilizan la autopista. ¿Qué parte de la gráfica es la que corresponde a ese tramo?

f) ¿A qué distancia se encuentra la empresa de la casa de Sabrina?

2) El siguiente gráfico refleja el relevamiento de datos obtenidos en el centro meteorológico de la ciudad de Cipolletti, hora a hora, desde las 0 a las 20 hs de un día.



Si llamamos *f* a la función que relaciona las variables involucradas en el problema. Responder:

a) ¿Qué variables se tuvieron en cuenta para confeccionar el gráfico de *f*? (Identificar variable independiente y variable dependiente).

b) ¿Cuál es el dominio de f? ¿Cuál es la imagen?

c) ¿Cuál es el valor de *f*(2)? ¿y de *f*(8)?

d) ¿En qué horarios la temperatura fue de 10ºC?

e) ¿Cuáles son las temperaturas máxima y mínima y a qué hora se alcanzan esos valores?

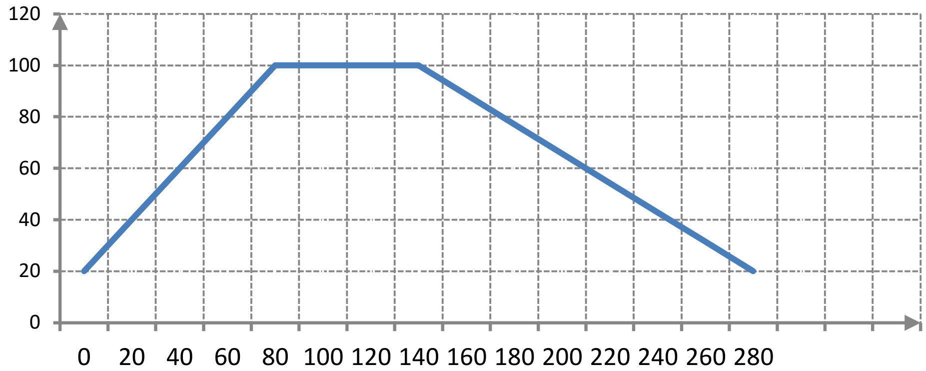
f) ¿Desde qué hora y hasta qué hora se produjo un aumento de la temperatura?

g) ¿En qué intervalos de tiempo se produjo un descenso de la temperatura?

h) ¿Qué ocurrió entre las 15 hs y las 17 hs?

i) ¿En qué mes te parece que pueden haber sido realizadas las mediciones?

3) Se ha calentado una olla con agua. Cuando empieza e hervir (a 100°C), se deja enfriar. Observar el gráfico y responder:



a) ¿Qué variables se han representado en los ejes?

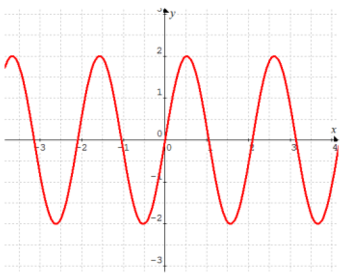
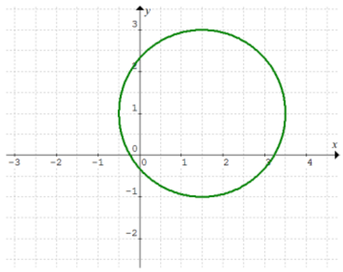
b) ¿Qué representa cada unidad en el eje horizontal? ¿Y en el eje vertical?

c) ¿Cuál era la temperatura inicial del agua?

d) ¿Cuánto tiempo permanece el agua a 100°C?

e) ¿Cuánto tiempo tarda en enfriarse hasta llegar a los a 20°C?

4) Indicar si los siguientes gráficos corresponden a funciones. Justificar las respuestas.


5) Cada una de las siguientes tablas se corresponde con una de las fórmulas de la lista. Establecer esa correspondencia.

a)

x	0	1	2	3	4
y	1	4	13	28	49

b)

x	0	1	2	3	4
y	1	4	7	10	13

c)

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

i) $y = x + 1$

ii) $y = 3x + 1$

iii) $y = x^3 + 5$

iv) $y = x^3 + 1$

v) $y = 3x^2 + 1$

6) Si definimos la función a partir de la fórmula $g(r) = r + \frac{1}{r}$, determinar el valor de:

a) $g(1)$

c) $g(-0{,}1)$

b) $g(2)$ d) ¿Es posible encontrar $g(0)$? ¿Por qué?

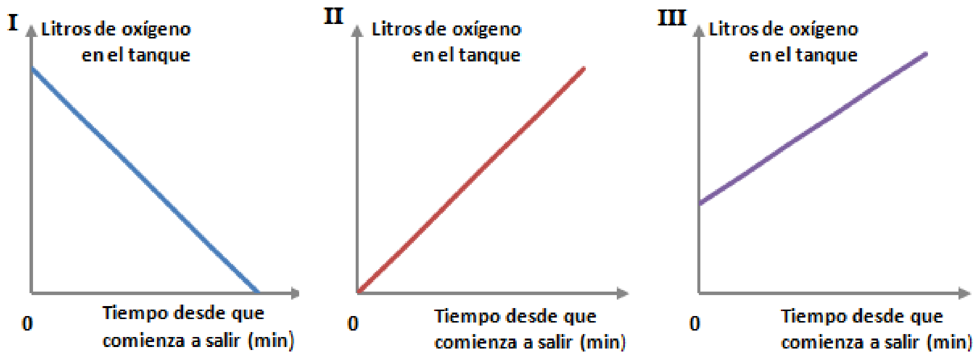
7) Indicar para cada una de las siguientes funciones cuál es su dominio. Calcular cuando sea posible $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ y $f(4)$.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad f(x)=3x+4$ $\quad f(x)=2x+\sqrt{x}$ $\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

$f(x)=\log(1-x)$ $\quad f(x)=(x+1)^2+2$ $\quad f(x)=-2$ $\quad f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$

8) Un tubo de oxígeno de 682 litros de capacidad, que originalmente estaba lleno, se está vaciando a razón de10 litros por minuto.

a) ¿Cuál de estos gráficos podría representar la cantidad de oxígeno que queda en el tubo a medida que transcurre el tiempo? ¿Cómo te das cuenta?



a) ¿Qué podrías hacer para saber cuánto tiempo pasará hasta que el tubo tenga la mitad del contenido original?

5. BIBLIOGRAFÍA

* Abdala, C., Real, M., Turano, C. Carpeta de matemática. Editorial Aique. 2003.
* Altman, S., Comparatore, C., Kurzrok, L. "Matemática: Funciones 1". Ed. Longseller, 2005.
* Altman, S., Comparatore, C., Kurzrok, L. "Matemática: Funciones 2". Ed. Longseller, 2005.
* Angel, Allen. "Algebra Elemental". Pearson Educación, 2007.
* Aufmann, R., Lockwood, J. "Algebra elemental". Cengage learning, 2013.
* Bocco, Mónica. "Funciones elementales para construir modelos matemáticos". Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2010.
* Carnelli, G., Novembre, A., Vilariño, A. "Función de gala". Ed. El Hacedor, 1999.
* Colera, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., Oliveira, Ma. J. "Matemáticas 2", Ed. Anaya, 1997.
* Colera, J., García, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., Oliveira, Ma. J. "Matemáticas 3". Ed. Anaya, 1995.
* Colera, J., García, J., Gaztelu, I., de Guzmán, M., Oliveira, Ma. J. "Matemáticas 4". Ed. Anaya, 1995.
* De Guzmán, M., Colera, J., Salvador, A.. "Bachillerato 2". Ed. Anaya, 1987.
* De Guzmán, M., Colera, J., Salvador, A.. "Bachillerato 3". Ed. Anaya, 1988.
* Ferraris, L., march, M. "Una puerta abierta a la Matemática: Trigonometría". Comunic.Arte, 2008.
* Itzcovich, H., Novembre, A. "M1 matemática". Ed. Tinta Fresca, 2006.
* Itzcovich, H., Novembre, A. "M2 matemática". Ed. Tinta Fresca, 2006.
* Martínez, M, Rodríguez, M. "Matemática". Editorial Mc Graw Hill. 2004.
* Martinez, M., Garelik, C., Ruiz, M., Bernardi, C., Perini, A. "Algunas nociones y aplicaciones de CALCULO". Editorial de la Universidad Nacional del Comahue. 2008.

Página de Internet

* http://uncomat.uncoma.edu.ar/