INTRODUCCION A LA MATEMÁTICA

Para el ingreso a las carreras:
Contador Público Nacional – Licenciatura en Administración – Ciclo General en Ciencias Económicas – Profesorado en Ciencias Económicas – Profesorado en Matemática – Licenciatura en Matemática

Facultad de Economía y Administración
Universidad Nacional del Comahue

Este cuadernillo está confeccionado por el Grupo de Docentes Tutores del Departamento de Matemática de la FaEA

¡Bienvenidos!

Estos apuntes han sido pensados para ayudarte a recuperar y consolidar los conocimientos matemáticos que seguramente adquiriste en el nivel medio, y que son la base para afianzar otros más complejos relacionados con la profesión que elegiste.

Para que podamos alcanzar este propósito es necesario que emprendas esta nueva etapa con **responsabilidad y compromiso**, sabiendo que nada es posible **sin esfuerzo** y que nada es **tan difícil, incomprensible o inalcanzable** como parece, sólo se necesita constancia, paciencia y **horas de estudio**.

Te sugerimos la lectura de este cuadernillo previa a la asistencia al curso. En clase se desarrollarán algunos ejemplos, se trabajará en grupo y se podrán consultar las dudas que hayan tenido en la resolución de los problemas.

Son objetivos de este curso que te habitúes a los tiempos disponibles en la Universidad para estudiar un tema, que siempre son breves, y que fortalezcas tu capacidad de resolver problemas de la manera más conveniente y en el menor tiempo posible, por lo que esperamos que aproveches los horarios de clase para completar aquellos ejercicios en que hayas tenido inconvenientes y verifiques los resultados que obtuviste, y no para comenzar a resolverlos recién en la clase.

Cada persona tiene una modalidad de estudio, de trabajo. Sin embargo te recomendamos que sigas el orden en que están presentados los temas y que trates de resolver la guía de ejercicios de cada uno de ellos. Es posible que aparezcan dificultades, no te desanimes, volvé a intentarlo. Si aún no llegás a la solución, anotá las dudas y buscá ayuda, un profesor o un compañero pueden brindártela. No te desanimes, seguí adelante, todo es posible, sólo hay que intentarlo.

INDICE:

Conjuntos Numéricos……………………………………………………….. 3

Modelos Matemáticos y Ecuaciones…………………………………… 26

Funciones………………………………………………………………….. 38

Función Lineal…………………………………………………………… 51

Bibliografía……………………………………………………………… 63

Símbolos Matemáticos

- $\Leftrightarrow$ se lee "si y sólo si"
- $\forall$ se lee "para todo"
- $\exists$ se lee "existe"
- / se lee "tal que"
- $\Rightarrow$ se lee "implica" o "entonces"
- $\subseteq$ se lee "incluido"
- $\nsubseteq$ se lee "no incluido"
- $\in$ se lee "pertenece"
- $\notin$ se lee "no pertenece"
- $<$ se lee "menor"
- $>$ se lee "mayor"

CONJUNTOS NUMÉRICOS

NÚMEROS NATURALES

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para contar una determinada cantidad de elementos (existen siete notas musicales, 9 planetas, etc.), para establecer un orden entre ciertas cosas (el tercer mes del año, el cuarto hijo, etc.), para establecer medidas (3,2 metros, 5,7 kg, –4ºC, etc.), etc.

Actividad 1: Escribir los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en las casillas de forma que la suma de los tres números de cada fila, de cada columna, y de las dos diagonales, dé siempre el mismo resultado. A esta distribución se le llama **cuadrado mágico.**

4		**2**
	5	
8		

Podemos afirmar que todos los números que utilizamos para resolver este problema son números naturales.

El conjunto de los números naturales está formado por aquellos que se utilizan para contar. Se los designa con la letra ℕ y se representan:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Es un conjunto que tiene infinitos elementos pues si bien tiene primer elemento, el 1 que es el menor de todos, no tiene último elemento ya que es suficiente con sumar 1 a un número para obtener otro mayor. Así, podemos afirmar también que es un conjunto ordenado, por lo que podemos representarlos sobre una recta de la siguiente manera:

Observación:

* Todo número natural n tiene su sucesor $n+1$ y también su antecesor $n-1$, excepto el número 1 que solo tiene sucesor.
* Siempre que se sumen dos números naturales se obtendrá otro número natural mientras que muchas veces, no sucede lo mismo si se restan.

¿Es posible encontrar un número que al restárselo a 32 dé por resultado 38?

Si lo traducimos al lenguaje algebraico: $32 - x = 38$, donde x representa al número buscado.

Es imposible encontrar un número natural que cumpla con estas condiciones. Decimos que esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales y lo escribimos así , $S = \emptyset$.

NÚMEROS ENTEROS

Para encontrar una solución a esta ecuación debemos buscarla en el conjunto de los números enteros, que se simboliza $\mathbb{Z}$ y está formado por los números naturales, el cero y los opuestos de los números naturales.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N}^{-} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

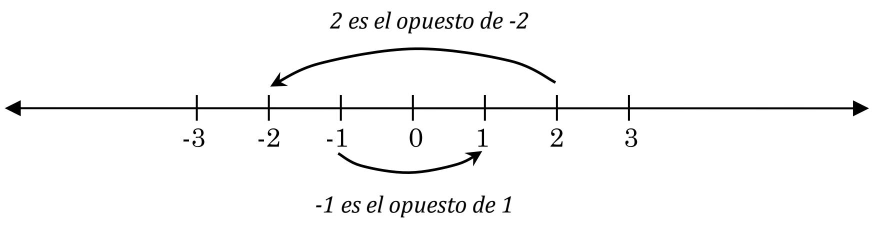
El conjunto de los números enteros es un conjunto infinito que no tiene ni primer ni último elemento, por lo que todo elemento de este conjunto tiene su siguiente $n + 1$ y su anterior, $n - 1$.

Entre dos números enteros a y b hay siempre una cantidad finita de números enteros, esta propiedad se conoce con el nombre de discretitud.

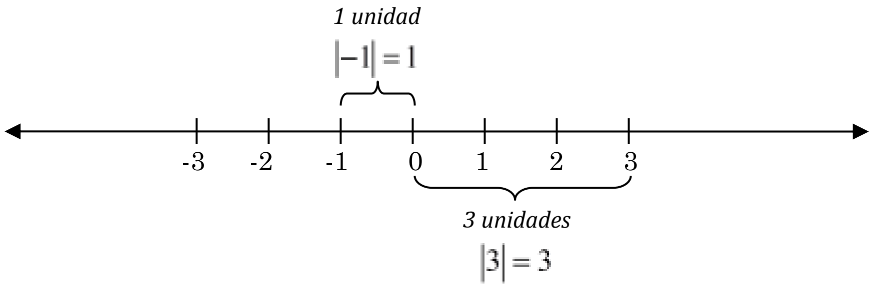
Observación

* Al número $-a$ se lo llama opuesto de a. Dos números opuestos son aquellos que se encuentran a la misma distancia (en unidades) del cero. Uno positivo y uno negativo, con excepción del cero, cuyo opuesto es él mismo.

  Por ejemplo: Si $a = 4$, su opuesto $-a$ es -4
  Si $a = -11$, su opuesto $-a$ es $-(-11) = 11$



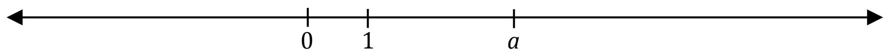
* El valor absoluto o módulo de un número a se define como la distancia de éste al cero.



* Dos números opuestos tienen igual distancia al cero, es decir, tienen el mismo valor absoluto, es decir, $|a| = |-a|$.

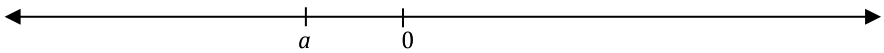
Actividad 2:

a) En la siguiente recta numérica están ubicados 0, 1 y a .



¿Dónde ubicarías los números $a+1, -a$ y $-a+1$?

b) En la siguiente recta están ubicados los números 0 y a.



¿Dónde ubicarías al número $-a$?

Observación:

* La suma de dos números enteros da siempre un número entero.
* La multiplicación de dos números enteros da siempre un número entero.

Múltiplos y divisores

📖 Definición: a es múltiplo de b si es posible encontrar un número entero k, tal que

$$a = kb, \ k \in \mathbb{Z}$$

Si a es múltiplo de b, la división de a por b tiene resto cero, por lo que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

* a es múltiplo de b
* b divide a a
* b es factor de a
* a es divisible por b

Por ejemplo: 30 es múltiplo de 5 pues $30 = 6 \cdot 5$, también podemos afirmar que:

5 divide a 30

30 es factor de 5

30 es divisible por 5

Tratá de enunciar las mismas proposiciones con 30 y 6.

¿Qué sucede cuando dividimos dos números enteros?

$4 : 2 = 2$ ya que $2 \cdot 2 = 4$

$-6 : 3 = -2$ ya que $3 \cdot (-2) = -6$

En general $a : b = c$, $b \neq 0$ si se verifica que $b \cdot c = a$

Pero, ¿cuál será el resultado de $4 : 3$? Debemos pensar en un número entero tal que al multiplicarlo por 3 dé como resultado 4. ¿Hay algún número entero que cumpla con esta condición?

Para resolver esta situación habrá que introducir otro conjunto numérico, el conjunto de los números racionales al que denotaremos con la letra $\mathbb{Q}$.

NÚMEROS RACIONALES

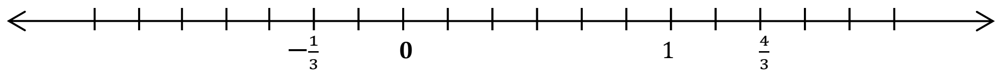
📖 Definición: Un número racional es el cociente (división) de dos números enteros m y n, siendo $n \neq 0$. Por lo tanto: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m, \ n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0\right\}$, donde m es el numerador y n el denominador. Notemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

De la definición de número racional surge que todo número entero es racional, pues podemos considerar al entero como un racional de denominador 1.

Por ejemplo: $-3 = \frac{-3}{1}$, donde $-3 \in \mathbb{Z}, 1 \in \mathbb{Z}$ y $1 \neq 0$.

¿Por qué se excluye al 0 del denominador en la definición?

Representemos en la recta numérica algunos números racionales:



Fracciones equivalentes

Si consideramos dos números racionales, por ejemplo, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ nos interesa ubicarlos en la recta numérica para establecer el orden entre ellos, o bien podríamos determinar el mayor y el menor sin la necesidad de ubicarlos en la recta. Para ello, nos resulta útil conocer el concepto de fracciones equivalentes.

Diremos que las fracciones , $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son equivalentes, es decir, representan el mismo número siempre que sea posible determinar un número k de manera que se verifique que $a \cdot k = c$ y que $b \cdot k = d$.

Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{5}$ de un entero, implica dividir en 5 unidades a nuestro entero y considerar de esas porciones tres.

Gráficamente,

Podríamos pensar que en lugar de realizar 5 divisiones iguales en nuestro entero que sean diez pero considerar de estas diez porciones seis, resultando

Como podemos observar, la porción representada equivale a la primera, ya que:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \qquad k = 2$$

Si nos interesara saber cuál de los números $\frac{3}{5}$ o $\frac{7}{9}$ es mayor podríamos trabajar con fracciones equivalentes que tengan el mismo numerador o el mismo denominador.

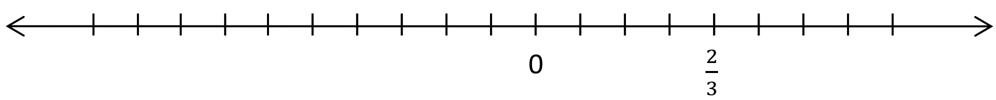
$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{27}{45}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{35}{45}$$

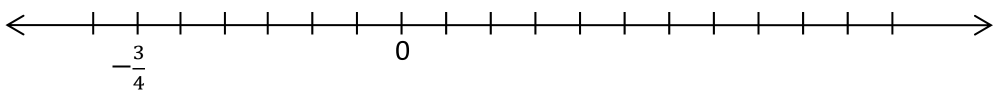
$$\therefore \quad \frac{3}{5} < \frac{35}{45}$$

Actividad 3: En cada caso, ubicar en la recta numérica los números racionales indicados.

a) $-\frac{4}{3}$



b) $\frac{3}{8}$ y -1



Ahora analicemos algunas expresiones decimales:

- 0,3 es la expresión decimal de un número racional porque 0,3 $= \frac{3}{10}$ y 3 y 10 son números enteros.

- $0,\hat{5} = 0{,}555 \ldots.$ es la expresión decimal de un número racional porque $0,\hat{5} = \frac{5}{9}$ y 5 y 9 son números enteros.
- $0{,}1\hat{5} = 0{,}1555 \ldots \ldots$ es la expresión decimal de un número racional porque $0{,}1\hat{5} = \frac{14}{90}$ y 14 y 90 son números enteros.

Estos tres últimos ejemplos muestran los tres tipos diferentes de expresiones decimales que puede tener un número racional:

- Expresión decimal finita: $0{,}3$; $-0{,}107$; $12{,}001$
- Expresión decimal periódica pura: $0,\widehat{23} = 0{,}2323 \ldots$; $7,\widehat{20} = 7{,}202020 \ldots.$
- Expresión decimal periódica mixta: $0{,}1\hat{5} = 0{,}1555 \ldots.$; $-5{,}25\widehat{13} = -5{,}251313 \ldots..$

> Todo número racional puede escribirse como una expresión decimal cuya parte decimal puede tener un número finito de cifras o puede tener un número infinito de cifras pero periódicas, pura o mixta.

Supongamos que nos dan el número decimal $23{,}3\hat{5}$. Es una expresión decimal periódica mixta, así que ya sabemos que es un número racional y por lo tanto se tiene que poder expresar como una fracción (cociente de dos enteros). ¿Qué fracción es?
Para hallar esta fracción, existe una regla muy simple que podemos resumir así:

$$\frac{(\text{todas las cifras de la expresión}) \; - \; (\text{las cifras no periódicas de la expresión})}{\text{tantos } 9 \text{ como cifras decimales periódicas y tantos } 0 \text{ como cifras decimales no periódicas}}$$

Aplicando esta regla al ejemplo, obtenemos: $23{,}3\hat{5} = \frac{2335-233}{90} = \frac{2102}{90}$

Y simplificando la fracción obtenemos: $23{,}3\hat{5} = \frac{1051}{45}$

Otro ejemplo: $32{,}1\widehat{427} = \frac{321427-321}{9990} = \frac{321106}{9990} = \frac{160553}{4995}$

Observación:

* Siempre podemos verificar si la fracción que obtuvimos es correcta realizando la división y verificando que el resultado coincide con la expresión decimal que teníamos.
* Veremos la justificación de estas reglas al trabajar con ecuaciones.

Operaciones con fracciones

<u>Suma de fracciones</u>

Recordemos que la suma de varias fracciones con igual denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

Por ejemplo: $\frac{3}{5} + \frac{13}{5} + \left(-\frac{21}{5}\right) = \frac{3+13-21}{5} = \frac{5}{5} = 1$

Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente.

Por ejemplo: $\frac{3}{7} - 2 + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} - \frac{42}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9-42+5}{21} = -\frac{28}{21}$

Observación:

Recordemos que estas expresiones son equivalentes: $-\frac{3}{8} = \frac{-3}{8} = \frac{3}{-8}$

Recordemos que si necesitamos buscar fracciones equivalentes a otras dadas para realizar una suma es aconsejable buscar el **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) entre los denominadores.

Mínimo común múltiplo

En una fábrica se oye, cada 18 segundos, el golpe de un martillo y cada 24 segundos, el escape de la presión de una válvula. Si se acaban de oír ambos ruidos simultáneamente ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que vuelvan a coincidir?

Para poder calcular el tiempo que transcurrirá hasta oír ambos ruidos a la vez debemos calcular el primer múltiplo común entre 18 y 24.

Los primeros múltiplos positivos de 18 son: 18, 36, 54, **72**, 90, 108, 126, **144**, 162,….

Los primeros múltiplos positivos de 24 son: 24, 48, **72**, 96, 120, **144**, 168,….

Observemos que hay un número infinito de múltiplos de cada uno de ellos y a su vez, hay infinitos múltiplos comunes a ambos: 72, 144, … El menor de ellos es el 72 y es el que llamamos mínimo común múltiplo por ser el menor de los múltiplos comunes y lo indicamos

$$mcm(18,24) = 72$$

Otra forma de encontrar el mínimo común múltiplo entre dos números es descomponiéndolos a cada uno de ellos en el producto de sus factores primos y multiplicando todos los factores que sean diferentes y de los factores que sean iguales, multiplicando el que tenga el mayor exponente.

En este ejemplo:

$$18 = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 24 = \pm 1 \cdot 2^3 \cdot 3$$

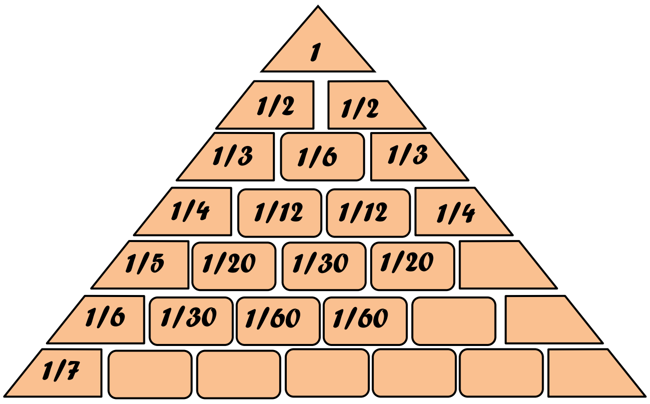
$$mcm(18,24) = \pm 1 \cdot 2^3 \cdot 3^2$$

Actividad 4:

1) Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes números:
   a) 15 y 20 b) 30 y 45 c) 4, 6 y 10 d) 12 y 18

2) Resolver las siguientes sumas algebraicas:
   a) $\frac{7}{30} + \frac{4}{5} - \frac{8}{45}$ b) $\frac{11}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{18} - \frac{9}{10}$

Actividad 5: Completar el siguiente triángulo numérico con las fracciones que faltan.



Producto de números racionales

En general, el producto entre dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $b, d \neq 0$ es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \qquad b, d \neq 0$$

Coloquialmente, la multiplicación de una fracción por una cierta cantidad se lee como "la fracción de esa cantidad". Por ejemplo, $\frac{3}{4} \cdot 16$ se lee "tres cuartos de 16" o "las tres cuartas partes de 16" y se calcula

$$\frac{3}{4} \cdot 16 = \frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 1} = \frac{48}{4} = 12$$

Observación: Podríamos simplificar antes de realizar el producto.

Actividad 6:

a) La región euroasiática-africana ocupa aproximadamente $\frac{3}{5}$ partes de las tierras emergidas. Asia ocupa aproximadamente la mitad de esa región. ¿Qué parte de la superficie terrestre está ocupada por Asia?

b) ¿Cuántos días representan $\frac{4}{15}$ en un mes (30 días)?

¿Qué sucede cuando multiplicamos cualquier fracción por 1?

¿Qué resultado se obtiene al realizar las siguientes multiplicaciones:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \ldots \qquad \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = \ldots \qquad \frac{1}{3} \cdot 3 = \ldots$$

Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, $a, b \neq 0$ se llaman **inversos multiplicativos**.

Actividad 7:

a) Encontrar el inverso multiplicativo de $\frac{4}{9}$ y de $\frac{6}{5}$.

b) ¿El cero tiene inverso multiplicativo? ¿Por qué?

<u>División de números racionales</u>

Retomemos la Actividad 6 a), para calcular que superficie ocupa Asia podríamos dividir a $\frac{3}{5}$ en 2, es decir,

$$\frac{3}{5} \div 2 = \frac{\frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

Así, podríamos concluir que para dividir dos números racionales podemos multiplicar la fracción que está en el numerador por el inverso multiplicativo de la fracción que está en el denominador. En símbolos,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad , b, c, d \neq 0$$

Por ejemplo, ¿cuántas varas de $\frac{3}{4}\,m$ se pueden cortar si se tienen $\frac{13}{2}\,m$ de alambre?

$$\frac{13}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{13}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{13 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{13 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$$

Se podrán cortar 8 varas y sobrarán $\frac{2}{3}\,m$ de alambre.

Porcentajes

Las fracciones o decimales muchas veces se expresan como **porcentajes**, por ejemplo, 8% quiere decir $\frac{8}{100}$ ó, lo que es lo mismo, 0,08. En general, b% significa "b partes de 100" y es otra manera de escribir $\frac{b}{100}$.

Por ejemplo, el 42% significa $\frac{42}{100}$ entonces $42\% = \frac{42}{100} = 0{,}42$

 La unidad representa el 100% entonces una forma simple de convertir un número decimal a porcentaje es multiplicando por 100%. Por ejemplo, $0{,}75 = 0{,}75 \cdot 1 = 0{,}75 \cdot 100\% = 75\%$.

Los porcentajes se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones de cantidades como población, salarios o precios.

Actividad 8:

a) Si la inflación de un determinado mes es del 3% y un trabajador cobrase \$ 18.000 en ese mes ¿cuál debería ser el salario del mes siguiente para compensar la inflación?

b) El precio de una camisa sin IVA es de \$650. Si el IVA es del 21% ¿cuál será el precio final de la camisa? Por pagar al contado se hace un descuento del 10% sobre el precio de lista y si paga con tarjeta de crédito se realiza un recargo del 5% ¿cuál será la diferencia, en pesos, de pagar de una u otra forma?

c) Un artículo que costaba inicialmente \$ 1500 fue rebajado en diciembre un 12%. En el mes de enero tuvo una segunda rebaja de un 15% y, en febrero, se rebajó otro 10%. ¿Cuál es el precio final después de las tres rebajas? ¿Cuál es el porcentaje total de la rebaja?

d) Por un artículo que estaba rebajado un 12% se ha pagado \$ 260. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

e) Un producto costaba \$ 42 en el mes de julio y ahora cuesta \$ 50. Indicar el porcentaje de aumento que sufrió el producto.

Observación

∗ Si n es un número entero, $n+1$ es el entero siguiente y no existe otro número entero entre ellos. Pero, a diferencia del conjunto de los números enteros, en $\mathbb{Q}$ no tiene sentido hablar de siguiente ni de anterior. Por ejemplo, si $n=\frac{1}{2}$ no podemos afirmar que $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ sea su sucesor inmediato pues existe el 1 o el $\frac{3}{4}$ que están entre ellos y podríamos seguir encontrando otros números racionales que cumplan con la misma condición.

Observemos que entre dos números racionales, a y b , $a<b$, existe el racional $\frac{a+b}{2}$ que verifica: $a<\frac{a+b}{2}<b$

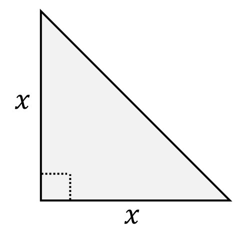
Conclusión: entre dos racionales distintos a y b existen infinitos números racionales.

Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto $\mathbb{Q}$ es un **conjunto denso**, en contraposición a los naturales $\mathbb{N}$ y los enteros $\mathbb{Z}$ que, como ya dijimos, son conjuntos discretos.

¿Cuáles son las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si se sabe que su área es 6,5 cm^2?

Como el triángulo es rectángulo isósceles, sus catetos son iguales por lo que el área que es de 6,5 cm^2 queda expresada con la siguiente ecuación:

$$\frac{b\cdot h}{2}=\frac{x\cdot x}{2}=6{,}5 \Leftrightarrow x^2=13$$



Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, porque no existe ningún número racional que elevado al cuadrado dé por resultado 13.
Aparece entonces un nuevo conjunto numérico, el de los números irracionales que se simboliza con $\mathbb{I}$. Los elementos de este conjunto tienen desarrollo decimal infinito no periódico.

El lado del triángulo anterior mide $\sqrt{13}$ y es un número irracional. Otros números irracionales son:

$6{,}12123123412345\ldots.$

$\pi = 3{,}14159254\ldots$

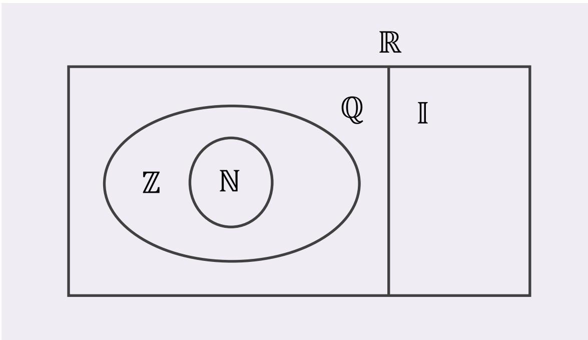
$-15{,}161718192021\ldots$

$\sqrt[3]{7}$

NÚMEROS REALES

El conjunto formado por los números racionales y por los irracionales se llama conjunto de los números reales y se simboliza $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Los números reales tienen la propiedad de llenar por completo la recta numérica, por eso se la llama recta real.

Dado un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponde un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.

OPERACIONES EN $\mathbb{R}$

Suma y producto

Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{R}$ cumplen ciertas propiedades. Veamos algunas de ellas:
Sean a, b y c números reales cualesquiera.

Propiedades	**de la Suma**	**del Producto**
Ley de cierre	$a+b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$ *	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ *
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Existencia de elemento neutro	Es el 0: $a+0=0+a=a$	Es el 1: $a\cdot 1=1\cdot a=a$
Existencia de inverso	Es el opuesto aditivo: $a+(-a)=(-a)+a=0$	Es el inverso multiplicativo: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1 \quad si \;\; a\neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	

Observación: La propiedad asociativa nos permite prescindir del uso de paréntesis y escribir simplemente $a+b+c$ ó $a\cdot b\cdot c$.

Actividad 9: Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas, mencionar las propiedades utilizadas y en caso de ser falsas, explicar claramente por qué.

a) $\frac{1}{3}\cdot(5+4)=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}$
b) $-2\cdot\left(\frac{8}{9}-5\right)=(-2)\cdot\frac{8}{9}-5$
c) $\sqrt{2}+c=c+\sqrt{2}$
d) $3+[8\cdot(-9)]=(3+8)\cdot[3+(-9)]$
e) $\frac{1}{a}\cdot a=1, \forall a\in R$
f) Existe un número real x para el cual $\frac{\sqrt{5}}{\pi}+x=0$

<u>Potenciación</u>

Si a es un número real y n es un número natural, entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a, es decir:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ veces}$$

Por ejemplo: $a^3=a\cdot a\cdot a$

Decimos entonces que a^n es una potencia que tiene a como base y n como exponente.

Extendemos la definición para exponentes enteros definiendo, para $a \neq 0$:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{-n} = (a^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Actividad 10: Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a) $2^8 = 2^2 \cdot 2^6 = 2^5 \cdot 2^3$
b) $(8+3)^2 = 8^2 + 3^2$
c) $(8 \cdot 3)^2 = 8^2 \cdot 3^2$
d) $(2^3)^2 = 2^5$
e) $(2^3)^2 = 2^6$
f) $-3^2 = (-3)^2$
g) $5^4 = 4^5$
h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{3^{-2}}$
i) $5^{-2} = -10$

La actividad anterior ejemplifica algunas de las siguientes propiedades de la potencia:

Sean a, b números reales distintos de 0 y sean m, n números enteros.

Propiedades de la Potencia	
Distributiva con respecto al producto	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Distributiva con respecto a la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^m =$ ....
Producto de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} =$ ....
Potencia de potencia	$(a^n)^m =$ ....

La potencia no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta.

¿Qué sucede si a un número negativo lo elevamos a una potencia par? ¿Cuál es el signo del resultado?

Radicación

Para los enteros positivos n ya se ha definido la n-ésima potencia de b, a saber, b^n. Ahora vamos a utilizar la ecuación $a = b^n$ para definir la n-ésima raíz de a.

La notación de la raíz cuadrada de 49 es $\sqrt{49}$. Su valor es 7 porque $7^2 = 49$ y $7 > 0$. Aun cuando $(-7)^2 = 49$, el símbolo $\sqrt{49}$ se usa sólo con $+7$ y no con -7, así que se tendrá un solo valor de $\sqrt{49}$. Claro que siempre es posible escribir $-\sqrt{49}$ si se desea el valor negativo -7. Podemos observar que -49 no tiene una raíz cuadrada real ya que $b^2 > 0$ para todo número real b, por lo que $b^2 = -49$ no tiene solución en el conjunto de los números reales. En general, la raíz cuadrada de a se define como sigue, a veces recibe el nombre de raíz cuadrada principal de $\boldsymbol{a}$.

Si a es un número real positivo, $\sqrt{a} = b$ si y sólo si $a = b^2$ y $b > 0$

Además, $\sqrt{0} = 0$.

Ejemplo: $\sqrt{25} = 5$, pues $5^2 = 25$ (no es -5 ni ± 5)

En el caso de las raíces cúbicas se puede utilizar tanto números positivos como negativos, así como el cero. Por ejemplo, $2^3 = 8$ y $(-5)^3 = -125$

Se puede decir entonces que,

Si a y b son números *reales cualesquiera*, $\sqrt[3]{a} = b$ si y sólo si $a = b^3$

En particular, $\sqrt[3]{0} = 0$

Ejemplos: $\sqrt[3]{343} = 7$ pues $7^3 = 343$
$\sqrt[3]{-1728} = -12$ pues $(-12)^3 = -1728$

Se puede ver que existe una diferencia básica entre las raíces cuadradas y las raíces cúbicas. Las raíces cuadradas están definidas sólo para los números reales positivos y el cero. Las raíces cúbicas están definidas para cualquier número real.

Lo mismo sucede con cualquier entero positivo n: la distinción fundamental surge de si n es par o impar.

- Si n es un entero positivo par y a y b son números **reales positivos** tales que $a = b^n$, entonces existe $\sqrt[n]{a} = b$.
- Si n es un entero positivo impar y a y b son números **reales** tales que $a = b^n$ entonces existe $\sqrt[n]{a} = b$.
- En cualquiera de los dos casos, $\sqrt[n]{0} = 0$.


Observaciones:

* El número a es el radicando, $\sqrt{\ }$ es el signo radical, n es el índice del radical y $\sqrt[n]{a}$ es la expresión radical o raíz $n-$ ésima de a.
* El símbolo $\sqrt{a}$ se utiliza sólo para representar $\sqrt[2]{a}$.

Potencias de exponente fraccionario

Observemos las siguientes analogías:

$$a^{\frac{6}{3}} = a^2 \;\text{ y }\; \sqrt[3]{a^6} = a^2 \qquad\qquad a^{\frac{15}{5}} = a^3 \;\text{ y }\; \sqrt[5]{a^{15}} = a^3$$

Estos ejemplos nos inducen a adoptar la siguiente definición para el caso de potencias de exponente fraccionario:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}\ ,\ \text{donde } a \in \mathbb{R}^+\ ,\ n \in \mathbb{Z} \text{ y } m \in \mathbb{N}$$

¿Cuándo es posible calcular una potencia de exponente fraccionario y base negativa?

Veamos ahora las propiedades de la radicación, las cuales son análogas a las de la potenciación.

Propiedades de la Radicación (a y b números reales positivos y n, m números naturales)	
Distributiva con respecto al producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Distributiva con respecto a la división	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

1) ¿Es posible aplicar la propiedad distributiva de la radicación respecto a la suma o a la resta? Proponer ejemplos.
2) ¿Qué sucede al aplicar la propiedad distributiva al siguiente radical: $\sqrt{(-4) \cdot (-16)}$?

Simplificación de radicales

Actividad 11: Efectuar las siguientes operaciones

a) $\sqrt[4]{2^8}$, $\sqrt{2^4}$ y 2^2 b) $\sqrt[10]{3^{20}}$, $\sqrt{3^4}$ y 3^2 c) $\sqrt{(-2)^6}$ y $(-2)^3$

> Observemos que, en algunos casos se puede dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número sin alterar el resultado. A esta propiedad la llamaremos **simplificación de radicales.**

* Si el índice de la raíz es impar se puede simplificar siempre sin tener en cuenta el signo de la base del radicando. Por ejemplo:

  $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ (dividimos índice y exponente por 5)

  $\sqrt[7]{\left(\frac{2}{3}\right)^{21}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ (dividimos índice y exponente por 7)

* Si el índice de la raíz es par, sólo se puede simplificar si la base es positiva, ya que si la base fuera negativa podría presentarse el siguiente caso:

  $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ (dividimos índice y exponente por 4) *y en realidad*, $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2.$

  Vemos que los resultados no coinciden. Por lo tanto:

Cuando el índice es PAR y el radicando es NEGATIVO, **NO** se puede simplificar.

Notemos que la única diferencia en el resultado es el signo y que las raíces de índice par dan como resultado siempre un número positivo. Podemos entonces escribir: $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$, donde el valor absoluto de un número a se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ \ a \geq 0 \\ -a & si\ \ a < 0 \end{cases}$$

Entonces podemos afirmar que:

Si n es impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$	Si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Actividad 12: Descubrir los errores cometidos en el siguiente desarrollo.

$$\sqrt[4]{2^8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(-2)^8}} + \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} + \left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = 2^2 \cdot \frac{1}{-2} + \sqrt{(-2)(-8)} + \left(-\frac{5}{3}\right)^{2}$$

$$= \frac{4}{-2} + \sqrt{16} + \frac{25}{9}$$

$$= -2 + 4 + \frac{25}{9}$$

$$= \frac{43}{9}$$

Recordemos como operar con radicales…

Adición y Sustracción de términos con radicales

✓ <u>Radicales expresados como raíces con igual índice y radicando</u>

1. Se extrae factor común de todos los términos en los que aparezca el radical involucrado:

$$5\sqrt{6}-\frac{1}{3}\sqrt{6}+\frac{2}{5}\sqrt{6}-2=\sqrt{6}.\left(5-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)-2$$

2. Se suman y restan los números racionales:

$$\sqrt{6}.\left(5-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)-2=\underbrace{\sqrt{6}\ \frac{76}{15}-2}_{\boxed{\text{Este es el resultado!!!}}}$$

✓ <u>Radicales expresados como raíces con distinto índice y/o radicando</u>

3. Se descompone cada uno de los radicando, en forma de producto. Buscando que aparezca el menor de los radicandos en todos los términos

$$\sqrt{8}-\sqrt{2}+\sqrt{72}=\sqrt{2.4}-\sqrt{2}+\sqrt{2.36}$$

4. Se aplica propiedad distributiva con respecto al producto

$$\sqrt{2.4}-\sqrt{2}+\sqrt{2.36}=\sqrt{2}.\sqrt{4}-\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{36}$$

5. Se procede a resolver aquellas raíces cuyo resultado es un numero racional

$$\sqrt{2}.\sqrt{4}-\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{36}=\sqrt{2}.2-\sqrt{2}+\sqrt{2}.6$$

6. Se extrae factor común el numero irracional de cada uno de los términos en los cuales aparece

$$\sqrt{2}.2-\sqrt{2}+\sqrt{2}.6=\sqrt{2}.(2-1+6)$$

7. Se resuelve la suma algebraica de números racionales

$$\sqrt{2}.(2-1+6)=\sqrt{2}.7=7\sqrt{2}$$

Observación: Si no es posible encontrar como factor común un radical, no se puede resolver la operación

Multiplicación y división con radicales

Para multiplicar o dividir expresiones en las cuales aparecen números irracionales se procede a agrupar, si existen, mediante la aplicación de propiedades, los números racionales por un lado y los irracionales por otro.

Luego se procede a resolver las operaciones que correspondan en racionales y/o irracionales.

Ejemplo:

$$\left(8.\sqrt{5}\right):\left(2.\sqrt{\frac{1}{20}}\right)=\frac{8.\sqrt{5}}{2.\sqrt{\frac{1}{20}}}=\frac{8}{2}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{1}{20}}}$$

….lo cual puede escribirse….

$$\frac{8}{2}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{1}{20}}}=4.\left(\sqrt{5}:\sqrt{\frac{1}{20}}\right)=4.\sqrt{5:\frac{1}{20}}=4.\sqrt{100}=4.10=40$$

Para multiplicar y/o dividir radicales estos deben tener el mismo índice.

Racionalización de denominadores

Cuando una expresión fraccionaria tiene indicado en el denominador un radical, resulta ser conveniente modificar tal expresión- sin cambiar su significado-por otra cuyo denominador sea racional. Este proceso recibe el nombre de racionalización del denominador.

Trabajaremos únicamente dos casos:

1) Denominador con radical único: Multiplicamos numerador y denominador por un radical que tenga:

- igual índice que el que figura en el denominador.
- radicando tal que al efectuar el producto de este con el radicando del radical que existe, resulte una expresión (un número) que tenga como exponente un múltiplo del índice (al cual pueda calculársele la raíz en racionales).

Ejemplo:

$$\frac{x^{-7}}{\sqrt[5]{x^{13}}}=\frac{x^{-7}.\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^{13}}.\sqrt[5]{x^2}}=\frac{x^{-7}.\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^{13}.x^2}}=\frac{x^{-7}.\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^{13+2}}}=\frac{x^{-7}.\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^{15}}}=\frac{x^{-7}.\sqrt[5]{x^2}}{x^3}=\frac{x^{-7}}{x^3}.\sqrt[5]{x^2}=$$

$$x^{-7-3}.\sqrt[5]{x^2}=x^{-10}\sqrt[5]{x^2}$$

2) Denominador de dos términos con uno o ambos con radicales de igual índice:

- Multiplicamos numerador y denominador por el denominador de la expresión original, cambiando la operación que separa en términos por la inversa de ésta. Es decir, si los términos aparecían unidos por la operación de la suma, el que uso para multiplicar debe tener una resta y viceversa.
- Aplicamos la siguiente propiedad: $(a+b).(a-b)=a^2-b^2$.
- Operamos teniendo en cuenta el conjunto numérico al cual pertenecen los números.

Ejemplo:

$$\frac{15}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}=\frac{15.\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{8}\right)}=\frac{15.\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\frac{15.\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{5-8}=$$

$$\frac{15.\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)}{-3}=-5.\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)$$

Trabajo Práctico – Números reales

1) Completar con los símbolos $\in$, $\notin$, $\subseteq$ ó $\not\subseteq$ según corresponda.

- 4 .... $\mathbb{N}$
- $\sqrt{2}$ .... $\mathbb{I}$
- $\mathbb{N}$ .... $\mathbb{R}$
- $\{-2,\ \pi,\ 0\}$ .... $\mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2}$ .... $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$ .... $\mathbb{R}$
- $0,\overline{3}$ .... $\mathbb{I}$
- $\mathbb{N}$ .... $\mathbb{Z}$ .... $\mathbb{Q}$ .... $\mathbb{R}$

2) Dado el conjunto $S = \{12, \frac{5}{3}, \sqrt{7}, -38,\ 571, \pi, 0.6\}$, encontrar:

a) $S \cap \mathbb{N}$
b) $S \cap \mathbb{Q}$
c) $S \cap \mathbb{I}$
d) $S \cap \mathbb{Z}$

Representar el conjunto S en la recta numérica en forma aproximada.

3) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La suma de dos números naturales es siempre un número natural.
b) La diferencia de dos números naturales es siempre un número natural.
c) El cuadrado de un número racional negativo es un racional positivo.
d) Existen infinitos números racionales comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2}$.
e) El conjunto de los números naturales carece de primer elemento.

4) ¿196 y 245 son múltiplos de 7? Justificar. ¿Por qué podemos afirmar que la suma de ellos también es múltiplo de 7?

5) Dado un número entero cualquiera: ¿Cuál es su divisor positivo más pequeño? ¿y el más grande?

6) Dado un número natural cualquiera: ¿Cuál es su múltiplo positivo más pequeño? ¿Podés encontrar el más grande?

7) Responder:

a) Si $m = 14$, ¿cómo pueden representarse los números 13, 15 y 16 en términos de m?
b) Sea n un número par cualquiera, ¿cuál es el siguiente entero par? ¿Cuál el anterior?
c) Si x representa cualquier entero impar, ¿cuál es el siguiente entero impar? ¿Cuál el anterior?
d) Si x es cualquier entero par, ¿$x + 1$ es un entero par o impar? ¿Y $x - 1$?
e) Si x es cualquier entero, ¿$2x$ es par o impar? ¿Y $2x - 1$? ¿Y $2x + 1$?

8) Tres hermanos, Juan, pedro y Luis, reciben una herencia de \$ 800.000. En el testamento queda establecido que Pedro debe recibir el 30% de la herencia, Juan las dos quintas partes de lo que queda y el resto es para Luis. ¿Cuál de los tres hermanos recibe la mayor parte de la herencia?

9) Por trasladar a una persona enferma, la empresa de ambulancias cobra \$ 1250 sin IVA. Sabiendo que el IVA es del 10,5% ¿cuánto deberá pagar el paciente al momento del traslado? Si esa persona tiene Obra Social, solo paga el 40% del precio total. ¿Cuál sería el costo que absorbe la Obra Social?

10) Una zapatería quiere cobrar un recargo del 15% para las compras con tarjeta de crédito pero para que los clientes no se molesten cuando les advierte del recargo decide hacer los siguiente: cambia los precios de toda la mercadería, aumentándolos en un 15% y al momento de la venta les dice que por pago contado efectivo les hace un 15% de descuento. Si un par de sandalias cuesta en realidad \$ 1200, luego de todos estos cálculos ¿el cliente que paga al contado pagará efectivamente ese precio? Si la mayoría de las ventas son al contado, le conviene al comerciante este método?

11) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta proponiendo un contraejemplo, en caso de ser falsa, o enunciando las propiedades aplicadas, en caso de ser verdadera.

a) si $a = -2$ y $b = 0$, entonces $a : b = 0$
b) $(-a) \cdot (-b) = -(a \,.\, b)$
c) el cociente entre un número y su opuesto es igual a -1
d) $a + (-b + c) = a - b + c$
e) el inverso de 2 es $-\frac{1}{2}$.
f) $a : (b + c) = a : b + a : c$ con $b + c \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$
g) $b - [-c \cdot (2 - 1) - 1] = b$
h) $a - (b + c) = a - b + c$
i) $(b + c) : a = b : a + c$, con $a \neq 0$
j) para todo $a \in \mathbb{R}$, $a : a^{-1} = 1$
k) para todo $a \in \mathbb{R}$, $(a^{-1})^{-1} = a$
l) la ecuación $2x = 1$ tiene solución en $\mathbb{Z}$

12) Calcular:

1) $(5 + 3)^2 =$ .... $\qquad 5^2 + 3^2 =$ ....

2) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^4 =$ .... $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1^4 =$ ....

3) $(-2)^3 =$ .... $\qquad 3^{-2} =$ ....

4) $(-2)^{3^2} =$ .... $\qquad \left[(-2)^3\right]^2 =$ ....

13) Completar con $=$ ó $\neq$ y justificar:

a) -4^2 ______ $(-4)^2$

b) $1-2\cdot\frac{5}{4}$ ______ $(1-2)\cdot\frac{5}{4}$

c) $\frac{2^3}{4-\frac{1}{2}}$ ______ $2^3 \div \left(4-\frac{1}{2}\right)$

14) Resolver los siguientes cálculos combinados y expresar la respuesta como una fracción irreducible.

a) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2-(-2)^2\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{7\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)}{\frac{1}{4}-2}$

c) $\frac{(-3)\cdot(-3+1)+\frac{4}{5}}{\left(4-\frac{2}{3}\right)\left(4+\frac{2}{3}\right)}$

d) $\frac{\left(-\frac{1}{8}-1\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\frac{1}{4}-\left(1-\frac{1}{5}\right)} \div \left(2-\frac{2}{11}\right)$

15) Resolver aplicando propiedades de la potenciación:

a) $\frac{\left(3^2\cdot 2^3\right)^3}{6^6}=$

b) $a^{-\frac{2}{3}}\cdot a^{-1}\cdot a\cdot a^{-\frac{5}{6}}=$

c) $\left[\frac{2\cdot(3b^{-2}d)(bd^3)}{12b^3d^{-1}}\right]^5=$

d) $0.2^{-\frac{5}{2}}:(5^{-1})^{\frac{3}{4}}=$

15) En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar las propiedades. Indicar cuáles son y corregirlos.

a) $\left(2^2\cdot 2^{-3}\cdot 2^5\right)^2=\left(2^4\right)^2=2^{16}$

b) $\left(5^2\right)^4:\left(5^{-3}\right)^2=5^6:5^{-6}=5^0=1$

c) $\frac{7^4\cdot\left(7^2\right)^6}{\left(7^9\right)^2}=\frac{7^4\cdot 7^{12}}{7^{18}}=(-7)^2=49$

d) $(7\cdot 2-14)^0+5^0=2$

16) Aplicar las propiedades de potenciación para demostrar que:

a) $(a+2)^2-(a-2)^2-4\cdot(2a+1)=-4$

b) $\left(3\cdot 3^{n+1}+3^{n+2}\right)^3:\left(3^{n+2}\right)^3=8$

c) $\left(10\cdot 2^{n+1}\right)^3:\left(2^{n+1}\right)^3=1000$

d) $2^{2-n}\cdot\left(2\cdot 2^{n+1}+2^{n+2}\right)=32$

17) Determinar si han sido resueltos en forma correcta los siguientes ejercicios y justificar:

a) $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$

b) $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=\sqrt{(-4)\cdot(-9)}=\sqrt{36}=6$

c) $\sqrt{(-2)\cdot(-8)}=\sqrt{16}=4$

d) $\sqrt{9+16}=3+4=7$

e) $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

f) $\sqrt[3]{-64}:\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{\dfrac{-64}{-8}}=\sqrt[3]{8}=2$

18) Unir con flechas las expresiones iguales, siendo $a, b \in \mathbb{R}^+$:

- $\sqrt[3]{64a^5\cdot 216b^9}$
- $\sqrt{\dfrac{400}{25}}$
- $\sqrt[4]{a^9b^7c^8}$
- $5\sqrt{ab}-\dfrac{5}{3}a\sqrt[4]{\dfrac{b^2}{a^2}}-\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}a^2b^2}$

$3\sqrt{ab}$

4

$24ab^3\sqrt[3]{a^2}$

$a^2bc^2\sqrt[4]{ab^3}$

19) Expresar como potencia de exponente fraccionario y calcular:

a) $\sqrt[8]{13}\cdot\left(\dfrac{1}{13}\right)^{-2}=$ b) $\dfrac{16^{0.25}\cdot\sqrt[3]{2}}{-4}=$ c) $\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{27}}=$ d) $\sqrt{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=$

En el inciso d) ¿Qué condición debe cumplir a?

20) Realizar las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{5}+6\sqrt{5}-2\sqrt{5}=$

b) $6\sqrt{200}+2\sqrt{50}-3\sqrt{18}=$

c) $\sqrt{12}-3\sqrt{48}+\sqrt{75}=$

d) $5\sqrt{6}-9\sqrt{24}+2\sqrt{54}=$

21) Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{-8}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{3}}=$ b) $\dfrac{7}{\sqrt{5^3\cdot 3^4}}=$ c) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=$

22) Verificar que se cumple la siguiente igualdad, considerando $a>0, b>0$

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$

¿Qué ocurre si $a=b$?

Modelos Matemáticos y Ecuaciones

En diferentes ámbitos de la vida diaria de algunos profesionales, empresarios o simplemente de alguien que quiere comprar un determinado artículo, se puede encontrar con las siguientes situaciones:

Situación 1: Las empresas A y B producen ambas un total de 20 toneladas de un determinado producto a lo largo de un mes. Sin embargo, la empresa A produce 10 toneladas más que la empresa B en el mismo lapso de tiempo. ¿Cuánto es la producción de cada una de ellas?

Situación 2: Determinar el precio de equilibrio de un bien cuyas funciones de demanda y de oferta están dadas por $D(p)=25-3p$ y $S(\mathrm{p})=-5+2\mathrm{p}$, respectivamente. Calcular, además, la cantidad del bien demandada para dicho precio de equilibrio.

Situación 3: Si una tienda rebaja sus artículos un 24% ¿cuál sería el precio inicial de una prenda cuyo precio rebajado es de 38 pesos?

Situación 4: Un comerciante de verdura compra una cierta cantidad de tomates a 15 pesos el kilo. Se le echan a perder 3 kilos y el resto lo vende a 25 pesos el kilo. ¿Qué cantidad ha comprado si la ganancia obtenida es de 125 pesos?

Situación 5: Un empresario ha comprado un local rectangular por 259.200 pesos. Sabiendo que uno de los lados del local tiene una longitud igual a las tres cuartas partes del otro y que el precio del metro cuadrado es de 600 pesos, ¿Cuáles son las dimensiones del local?

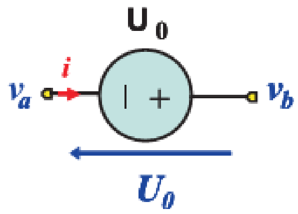
La matemática, que muchos describen como el "lenguaje del universo", nos otorga la posibilidad de describir, calcular y predecir el comportamiento del mundo que nos rodea para dar respuesta a estas situaciones u otras miles de preguntas que podemos plantearnos al observar nuestro alrededor.

La representación de nuestra realidad, de forma simplificada y de diferentes maneras que nos ayuden a comprender su comportamiento, se realiza a través de modelos.

Un **modelo** es una representación gráfica, esquemática o analítica de una realidad, que sirve para organizar y comunicar de forma clara los elementos que la conforman y sus relaciones.

Los modelos constituyen la base para estudiar y entender problemas propios de muchas áreas: economía, ingeniería, medicina, química, física, psicología, etc.

- Un mapa es un modelo de la superficie de la Tierra.



- Un circuito electrónico que describe una fuente de voltaje es un modelo esquemático.

- Las réplicas de aviones, automóviles, barcos, e incluso de muñecos de superhéroes, pero en una escala mucho menor, son modelos de los mismos.

- Maquetas y planos de edificios, centros comerciales, casas o complejos de oficinas son modelos que se usan para ver exactamente como se verá la "estructura real" cuando se construya.

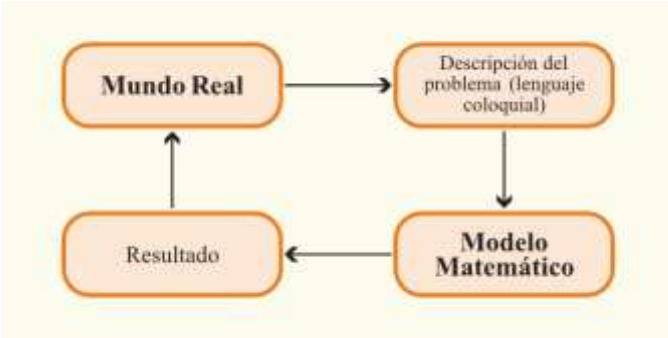
- Un modelo verbal es una narración con palabras que describe un paisaje o una compleja descripción de un negocio (relata y establece el escenario actual de la empresa, las metas y objetivos a seguir, etc.)

En muchas ocasiones, es de gran interés no sólo representar la situación sino el conocimiento de lo que ocurrirá en las mismas cuando las variables involucradas evolucionen. Aquellas representaciones en las que se explicitan las relaciones entre las variables mediante fórmulas, ecuaciones y uso de números, en general se denominan modelos matemáticos.

Un **modelo matemático** es la representación simplificada de la realidad, mediante el uso de funciones que describen su comportamiento, o de ecuaciones que representan sus relaciones.

Ante situaciones concretas como: el espacio recorrido por un móvil, el estiramiento de un resorte al aplicarle una fuerza o el aumento de temperatura de una sustancia al calentarla, entre otras, los científicos analizan cómo se vinculan las variables en juego y buscan fórmulas matemáticas que describan las relaciones que mantienen la misma regularidad. Cuando su relación se caracteriza por una velocidad de cambio constante, estamos en presencia de un modelo lineal.

Esquemáticamente:



En esta sección nos ocuparemos de representar las relaciones entre las variables de un modelo matemático mediante ecuaciones.

📖 Una **ecuación** es una relación de igualdad entre cantidades, donde una o varias de ellas son desconocidas.

La cantidad desconocida se llama **incógnita**. Cuando el valor desconocido es uno solo, la ecuación se dice con una incógnita. Es común que utilicemos la letra ***x*** para simbolizar la cantidad desconocida, aunque podemos usar cualquier letra del alfabeto.

Observación:

"Algunos historiadores de la Matemática afirman que la letra x se usó como abreviatura de la palabra árabe *shei* (cosa), para nombrar las incógnitas.

Sin embargo, se considera que la notación algebraica moderna fue inventada en 1637, por el matemático francés René Descartes. En su obra, se representan las constantes con las primeras letras del alfabeto(a, b, c, etc.) y las variables o incógnitas, con las últimas(x, y, z).

Se cuenta que el editor que estaba imprimiendo el libro, debido a la gran cantidad de ecuaciones que tenía, le preguntó a Descartes si podía emplear esas últimas letras para las ecuaciones. Descartes le respondió que le resultaba indiferente qué letras utilizase. El editor eligió utilizar especialmente la x, porque en francés esa letra se utiliza poco." (Matemática 8 EGB3. Editorial Tinta Fresca).

Ejemplos:

$2x+8z=1 \rightarrow$ una ecuación con dos incógnitas

$3^x+2=4 \rightarrow$ una ecuación con una incógnita

$\frac{1}{4}t+2=2t-3 \rightarrow$ una ecuación con una incógnita

$Log\left(2r+1\right)=4 \rightarrow$ una ecuación con una incógnita

Resolver una ecuación significa encontrar **el o los valores** que puede "tomar" la/s incógnita/s de modo tal que la igualdad se verifique.

📖 Al conjunto de valores que hacen que la ecuación se verifique se lo llama **conjunto solución** y puede estar formado por:

1) Un solo elemento.

Ejemplo: $2x+1=-1$. Solo tiene solución para $x=-1$. Escribiremos $S=\{-1\}$

Comprobarlo…

2) Tener un número finito de elementos

Ejemplo: $2x^2 + 2x - 4 = 0$.

Solo tiene solución para $x = 1$ y $x = -2$. Escribiremos $S = \{1, -2\}$ Comprobarlo…

3) Tener infinitos elementos.

Ejemplo: $2x = \frac{8}{4}x$, pues todo número real verifica esta igualdad. Escribiremos $S = \mathbb{R}$

4) No tener elementos.

Ejemplo: $x^2 = -1$, pues no existe número real que elevado al cuadrado dé -1.

Escribiremos $S = \emptyset$

Actividad 1: Un problema muy común donde debemos emplear ecuaciones para resolverlo es el siguiente:

Lucía y Esteban han ahorrado dinero durante un año. Lucía tiene en su alcancía la tercera parte del dinero que Esteban ha logrado guardar. Si entre los dos tienen 2400 pesos, ¿cuánto dinero ha ahorrado cada uno de ellos?

Encontrar dos ecuaciones distintas que modelicen este problema.

🕮 Dos ecuaciones se dicen **equivalentes** si poseen el mismo conjunto solución.

Ejemplo: $2x + 1 = -1$ y $4x + 2 = -2$ son ecuaciones equivalentes pues ambas se verifican, únicamente, para $x = -1$.

Para obtener una ecuación equivalente a una dada, utilizamos las siguientes **propiedades de la igualdad.**

Sean a, b y c tres números reales cualesquiera,

- ✓ **Reflexiva:** $a = a$
- ✓ **Simétrica:** $a = b$ entonces $b = a$
- ✓ **Transitiva:** Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$
- ✓ **Uniforme:**
  - Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
  - Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Con el uso de estas propiedades, al momento de resolver una ecuación, podemos transformarla en otra ecuación equivalente que sea de más fácil resolución.

Nos limitaremos a trabajar con ecuaciones con una incógnita.

<u>Resolución de ecuaciones de primer grado</u>

Se llama ecuación de primer grado a aquella donde la incógnita aparece elevada a la *potencia uno*. Por ejemplo: $\frac{1}{5}x+1=-3$.

Para resolver una ecuación de este tipo se debe obtener, mediante la aplicación de propiedades de la igualdad y operando con los términos, una ecuación equivalente a la dada. Tratando en todos los casos de encontrar el/los valores de la incógnita.

Ejemplos:

1) Sea la ecuación: $3.(x-2)+1=2$

Resolución:

$3.(x-2)+1=2$ (por propiedad distributiva)

$3x-6+1=2$ (operando)

$3x-5=2$ (por propiedad uniforme de la suma)

$3x-5+5=2+5$ (operando)

$3x=7$ (por propiedad uniforme del producto)

$\frac{1}{3}.3x=\frac{1}{3}.7$ (operando)

$x=\frac{7}{3}$

Conjunto solución: $S=\left\{\frac{7}{3}\right\}$ (Solución unitaria)

2) Sea la ecuación: $-10.x=5.(6x-8x)$

Resolución:

$-10.x=5.(6x-8x)$ (operando)

$-10.x=5.(-2x)$

$-10.x=-10.x$ (por propiedad uniforme del producto)

$-10.x\left(-\frac{1}{10}\right)=-10.x\left(-\frac{1}{10}\right)$ (operando)

$x=x$

Conjunto solución: $S=\mathbb{R}$ (Solución infinita)

3) Sea la ecuación: $7x-15=7.(2+x)$

Resolución: $7x-15=7.(2+x)$ (por propiedad distributiva)

$7x-15=14+7x$ (por propiedad uniforme de la suma)

$7x-15-7x=14+7x-7x$ (operando)

$-15=14$ ABSURDO!!!!!!!

Conjunto solución: $S=\varnothing$ (Solución vacía)

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Se llama ecuación de segundo grado a aquella de la forma $ax^2+bx+c=0$ ❶, donde $a\neq 0$ y $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Para resolver una ecuación de segundo grado, en algunos casos, igualamos a cero para llevar a la forma ❶; en otras ocasiones es conveniente omitir este paso. Veamos algunos ejemplos de estas situaciones:

1) Sea la ecuación: $3x^2=3$

Resolución: $3x^2=3$ (como la variable aparece en un único término es posible “despejar” en forma directa)

$3x^2=3$ (operando)

$x^2=\frac{3}{3}$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{1}$ (por propiedad de radicación)

$|x|=1$

$x=1$ o $x=-1$ $\Rightarrow$ Conjunto solución: $S=\{-1;1\}$

2) Sea la ecuación: $x^2 = -\frac{7}{3}x$

Resolución:

$$x^2 = -\frac{7}{3}x$$

$$x^2 + \frac{7}{3}x = 0 \qquad \text{(igualamos a cero)}$$

$$x\left(x + \frac{7}{3}\right) = 0 \qquad \text{(sacamos factor común x)}$$

$$x = 0 \quad ó \quad x + \frac{7}{3} = 0 \qquad \text{(por propiedad de números reales)}$$

$$x = 0 \quad ó \quad x = -\frac{7}{3} \Rightarrow \boxed{\text{Conjunto solución: } S = \left\{0; \frac{7}{3}\right\}}$$

Cuando la ecuación de segundo grado esta completa, es decir, tiene los tres términos que aparecen en ❶ podemos aplicar la conocida fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}.$$

El conjunto solución de estas ecuaciones depende de cómo sea la expresión: $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

- ✓ Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ entonces el conjunto solución está formado por un único elemento (un número real).
- ✓ Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ entonces el conjunto solución está formado por dos elementos (dos números reales).
- ✓ Si $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ entonces el conjunto solución es vacío. No existe número real que satisfaga la ecuación.

Cuando el conjunto solución es no vacío la fórmula nos da a lo sumo dos soluciones reales: x_1, x_2.

Así, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se puede reescribir en forma factorizada de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

3) Sea la ecuación: $4x^2 + 8x - 12 = 0$

Resolución: $4x^2 + 8x - 12 = 0$

(como la ecuación es de la forma ❶ estoy en condiciones de resolver utilizando fórmula antes mencionada)

$$a=4,\;\; b=8,\;\; c=-12$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{(8)^2-4.4.(-12)}}{2.4}$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+192}}{8}=\frac{-8\pm\sqrt{256}}{8}=\frac{-8\pm 16}{8}$$

$$x_1=\frac{-8+16}{8}=1 \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-8-16}{8}=-3$$

Luego puedo escribir la ecuación: $4.(x-1).(x-(-3))=0$ la que se verifica para $x=1$ o $x=-3$. Es decir, $S=\{-3;1\}$.

4) Sea la ecuación: $x^2-4x+4=0$

Resolución: $x^2-4x+4=0$

$$a=1,\; b=-4,\;\; c=4$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.4}}{2.1}$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=2$$

Luego puedo escribir la ecuación: $(x-2)(x-2)=(x-2)^2=0$ la que se verifica para $x=2$

$S=\{2\}$

5) Sea la ecuación: $x^2-2x+6=0$

Resolución: $x^2-2x+6=0$

$$a=1,\;\; b=-2,\;\;\; c=6$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.6}}{2.1}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-24}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-22}}{2}$$

Pero como $b^2-4.a.c=-22<0$ el conjunto solución es vacío. $S=\varnothing$.

Actividad 2:

1) Tenemos la ecuación $3x = 3$. Pedro resuelve y dice que la solución es $x = 0$ ¿Está en lo correcto?
2) Juan y María resolvieron la ecuación $x^2 = x$ de dos maneras diferentes y llegaron a resultados distintos.

Juan

$$x^2 = x$$
$$\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$$
$$x = 1$$
$$S = \{1\}$$

María

$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x.(x-1) = 0$$
$$x = 0 \quad ó \quad (x-1) = 0$$
$$x = 0 \quad ó \quad x = 1$$
$$S = \{0;1\}$$

a) ¿Quién está en lo correcto?

b) ¿Cuál fue el error cometido en la solución no correcta?

3) Resolver la siguiente ecuación: $(x+1)(x-6) = (x+1)(2-x)$. ¿Esta ecuación tiene una única solución? Justificar.

4) Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ que verifican la siguiente ecuación:

$$(x^3 - 8)(2x - 3) = (x^3 - 8)(x + 2)$$

¿Esta ecuación tiene más de una solución? Justificar

5) Resolver la ecuación: $(x^2 - 9)(5x + 6) = (x^2 - 9)(-4 - x)$.

¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación?

Trabajo Práctico – Ecuaciones e Inecuaciones

1) a) La solución de la ecuación $4x - 8 = 2x - (-x) - (-1)$ es:

- un número fraccionario y entero.
- un número entero y negativo.
- 9
- $\frac{9}{7}$
- ...ninguna de éstas.

b) La solución de la ecuación: $5x + 10x - 6 - 9 + 4x = x + 3 - 12$ es:

- 15
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{3}{2}$
- $-\left(\frac{2}{3}\right)$
- ninguna de éstas.

c) El valor de m que pertenece a $\mathbb{N}$ y que es solución de la ecuación

$m + 3(4m - 6) = -10 + 2(3m - 5)$ es:

- 0
- inexistente
- $-\left(\frac{2}{7}\right)$
- 2
- ninguna de éstas.

2) Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado y determinar la cantidad de elementos del conjunto solución:

a) $4 + x = \frac{1}{2}(15 + x)$

b) $3(x + 9) = \frac{-5 + 18x}{6}$

c) $5t + 4 - t = 4(1 + t)$

d) $a - x = 3(x - a)$, siendo x la incógnita y a un número real fijo.

e) $(y - 1)(2 + y) = 5 - y(4 - y) - 2y$

f) $\frac{5}{2}a + 2 - \left(\frac{a - 4}{3} + a + \frac{1}{6}\right) = 5a - \frac{2}{3}$

g) $y - 2 = 6(x + 4)$, siendo ambas, x e y, incógnitas.

3) Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones e identificar cuáles de ellas son equivalentes:

a) $\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

b) $\left(\frac{5}{6}x+3\right)^2=5x+8$

c) $-3(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

d) $3x^2+3(3x-1)=2(3x+2x^2)-13$

e) $w^2-\frac{1}{2}w-\frac{1}{2}=0$

f) $-\frac{1}{2}x^2=-\frac{3}{2}x-5$

4) Resolver las siguientes ecuaciones, escribir el conjunto solución y escribirlas en forma factorizada:

a) $x^2-25=0$

b) $-2x^2+x=10$

c) $3x^2-12x-63=0$

d) $3x^2=12x-12$

5) Responder:

a) ¿Es posible encontrar valores de x que satisfagan $(x+3)(x-3)=5(x+2)+31$ y $\dfrac{3x+15}{4}=0$ al mismo tiempo?

b) ¿Es posible encontrar valores de t que satisfagan $8t^2=-4t$ y $\dfrac{2t^2+2}{3}=\dfrac{4}{3}t$ a la vez?

6) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) El conjunto solución de la ecuación $\dfrac{2x^2-x}{x}=-15$ está dado por $\{0,-7\}$.

b) El par $(x, y)=(5, 2)$ es solución de la ecuación $3x^2-2y=51+10y$.

c) Las ecuaciones $\dfrac{(a+3)^2}{a+3}=0$ y $a+3=0$ son equivalentes.

d) 1 es la única solución de la ecuación $x^2+x-2=0$.

7) Resolver los siguientes problemas:

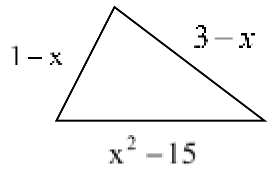
a) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después, la tercera parte del resto y quedan aún 1.600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

b) Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que su producto sea 255.

c) Un poste de luz de 7 m. se rompe y al doblarse, la punta de la sección rota toca el suelo a 3 m. de la base del poste. ¿A qué altura se rompió? (Ayuda: utilizar el Teorema de Pitágoras).

d) Pienso un número, le sumo 5, a este resultado lo multiplico por 3 y el nuevo resultado lo divido por 10. Obtengo así 6. ¿Qué número pensé?

e) El perímetro del siguiente triángulo es 24 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados?



f) Un rectángulo tiene por dimensiones el triple y el quíntuplo del lado de un cuadrado. Calcula las dimensiones de ambos cuadriláteros, sabiendo que la diferencia entre sus áreas es de 2015 cm^2.

FUNCIONES

Introducción

- En diferentes tramos de la multitrocha de la ruta 22 que une las ciudades de Neuquén y Plottier se está evaluando colgar este cartel:

¿Cómo interpretarían la **fórmula**? ¿Qué distancia debe conservar un automovilista que va a 100 km/h?

¿Les parece que los conductores respetarán lo que indica el cartel?

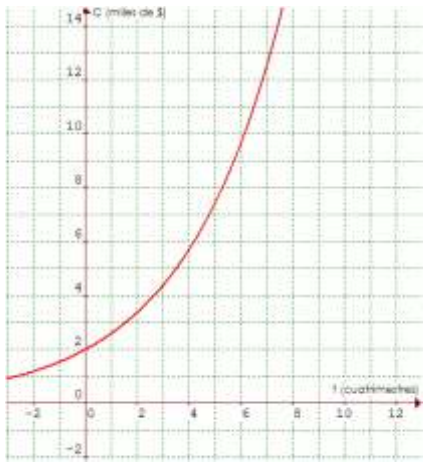
- Una revista especializada informa mediante una **tabla** las distancias de frenado de un automóvil moderno:

Velocidad (km/h)	Distancia de frenado (m)
40	7,30
60	14,80
80	20
100	41
120	60,80

Si analizan esta tabla podrán convencerse por qué a altas velocidades es fundamental respetar el cartel anterior ¿verdad?

- Cambiemos el vértigo de las rutas por el de la economía:

Si invertimos $2.000 en un banco que ofrece una tasa de interés del 7% anual, el modelo que nos permite obtener el capital final en cada tiempo *t* se puede representar mediante este **gráfico**.



Observando el gráfico respondan: ¿cuánto tiempo necesitaremos dejar depositado nuestro dinero para duplicar el capital inicial?

- ¿Cruzamos la cordillera?

Cuando en un terremoto las rocas se fracturan, la energía elástica almacenada en ellas se libera bruscamente.

Los científicos "no pueden vivir" sin manejar "fórmulas extrañas", fíjense como calculan la energía liberada durante un terremoto utilizando la siguiente fórmula:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot M \qquad \text{("log" significa logaritmo en base 10)}$$

Siendo, **E** la energía elástica expresada en ergios y **M** la magnitud del terremoto en escala Richter.

El terremoto en Chile en febrero del 2010 fue de una magnitud de 8,8 en escala Richter. Para calcular la energía que se liberó procedemos así:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 8{,}8 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad E = 10^{25}\ ergios \qquad \text{¿Mucha energía no?}$$

***Gráficos, tablas y fórmulas** son algunas de las maneras de representar **funciones**. Dedicaremos esta unidad a descubrir qué son, cuáles son sus características, cómo se clasifican.*

Concepto de función

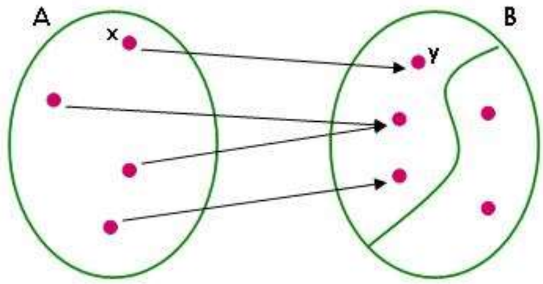
Cuando en la introducción analizamos el cartel de la multitrocha habrán descubierto que la distancia que se debe mantener **depende** de la velocidad del vehículo; en el caso de la energía liberada durante un terremoto, la misma **depende** de la magnitud del terremoto en escala Richter. En el primer caso se dice que la distancia está en **función** de la velocidad; en el segundo la energía liberada está en **función** de la magnitud del terremoto.

Podría decirse que una función es algo así como una "ley" que regula la **relación de dependencia** entre cantidades u objetos **variables**.

- **Definición de función:**

Una función ***f*** queda definida por:

- ✓ Un conjunto A llamado **dominio**.
- ✓ Un conjunto B llamado **codominio**.
- ✓ Una **ley** que asocia a cada elemento ***x*** del conjunto A un **único** elemento ***y*** del conjunto B.



- $\boldsymbol{x}$ es la variable independiente.
- $\boldsymbol{y}$ es la variable dependiente.

Observen que la función relaciona variables (números u objetos) de manera tal que se **cumplan** dos condiciones:

- ✓ **Existencia** (para cada valor de x **existe** un valor de y)
- ✓ **Unicidad** (a cada valor de x le corresponde un **único** valor de y)

📖 **Definición:** Decimos que f es una función de un conjunto A en otro conjunto B y escribimos $f: A \to B \Leftrightarrow \forall x \in A\, \exists\, un\ único\ y \in B \,/\, f(x) = y.$

Observación: No toda relación entre variables es función!

Ejemplos:

1) La relación que a cada argentino le hace corresponder su número de DNI es función, porque a todos y cada uno de los argentinos **(condición de existencia)** le corresponde un único DNI **(condición de unicidad).**

2) No es función la relación mujer – hijo. ¿Por qué?...porque no toda mujer tiene hijos (**condición de existencia)**, y existen mujeres que tienen más de un hijo **(condición de unicidad)**.

3) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

a) La relación “es múltiplo de” establecida de A en B no es función porque no se cumple la condición de unicidad. Por ejemplo al elemento 4 del conjunto A (dominio) le corresponde tres elementos (“1”, “2” y “4”) del conjunto B (codominio).

b) La relación “es múltiplo impar de” establecida de A en B no es función porque no se cumple ni la condición de unicidad ni la de existencia. Por ejemplo al elemento “2” del conjunto A no le corresponde ningún elemento del conjunto B **(condición de existencia)**; y al elemento “3” del conjunto A le corresponden dos elementos (“1” y “3”) del conjunto B **(condición de unicidad).**

Dominio, codominio e imagen de una función

- El conjunto de los valores *que puede tomar* la variable independiente se denomina **Dominio** de la función. Y se escribe *Dom (f)* o D_f.

- El conjunto que *contiene* a todos los valores que puede tomar la función se denomina **Codominio** de la función.

- El conjunto de los valores *que toma* la variable dependiente se denomina **Imagen** de la función. Observen que la imagen *está contenida* en el codominio. Y se escribe *Im(f)* o I_f.

Observación: En general, vamos a trabajar con funciones donde el dominio y codominio son conjuntos numéricos.

Dominio de funciones definidas por fórmulas

Analicemos el dominio de las siguientes funciones numéricas:

- $f(x) = 3x - 7$

La fórmula que define a la función *f* plantea como cálculo operaciones posibles para cualquier valor de la variable independiente *x*. Por lo tanto $Dom(f) = \mathbb{R}$.

- $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Como la división por 0 no está definida, el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales distintos de 0. Simbólicamente: $Dom\ (g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

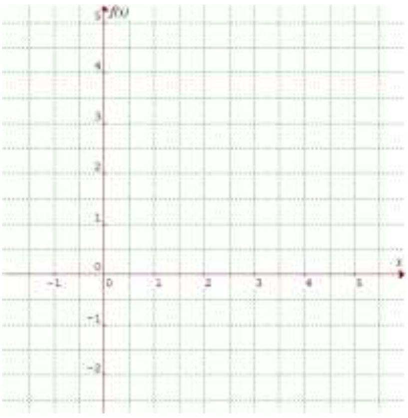
- $h(x) = \sqrt{x+4}$

Sabemos que en el conjunto de los números reales la raíz cuadrada de un número negativo no existe. En consecuencia, para la función *h* los valores posibles para *x* serán todos los números reales mayores o iguales a –4. Simbólicamente $Dom(h) = [-4\ ;\ +\infty)$

Tal como lo hicimos en este ejemplo, es muy usual llamar ***y*** al valor que le corresponde a ***x*** a través de una función. Por este motivo, cuando se define una función a través de su fórmula se usa indistintamente $f(x)$ *o* y .

Igual fórmula y distinto dominio

- Consideremos la función definida por la fórmula $f(x)=\frac{1}{2}x$

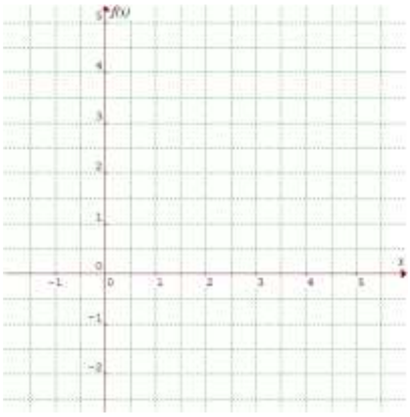


1) Si consideramos que esta fórmula representa el costo neto de producción para una cierta cantidad x de lápices producidos, ¿cómo sería su representación gráfica?

En esta situación particular la función se define sólo para números naturales, ¿por qué?

Consideraremos entonces: $Dom(f) = \mathbb{N}$

Con la ayuda de una tabla construir el gráfico para una producción de hasta 5 lápices.



2) ¿Cuál es el gráfico si consideramos que esta función representa la posición de un objeto que se mueve a velocidad constante durante un cierto período de tiempo?

Definir en términos del problema las variables independiente y dependiente.

¿Cuál es el dominio de *f*?

Construir el gráfico correspondiente.

En los dos casos planteados anteriormente se puede observar que una misma fórmula describe funciones con dominios diferentes.

Conjuntos de números reales: Intervalos

Los intervalos son conjuntos de números reales definidos de la siguiente manera:

📖 Cerrados

$$[a\,;b] = \{x/x \in \mathbb{R} \ y \ a \leq x \leq b\}$$

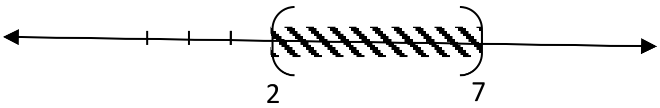
📖 Semiabiertos

- $(a\,;\,b] = \{x/x \in \mathbb{R} \ y \ a < x \leq b\}$
- $(-\infty\,;\,b] = \{x/x \in \mathbb{R} \ y \ x \leq b\}$
- $[a\,;\,b) = \{x/x \in \mathbb{R} \ y \ a \leq x < b\}$
- $[a\,;\,+\infty) = \{x/x \in \mathbb{R} \ y \ x \geq a\}$

📖 Abiertos

- $(a\,;b) = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; a < x < b\}$
- $(a\,;\,+\infty) = \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; x > b\}$

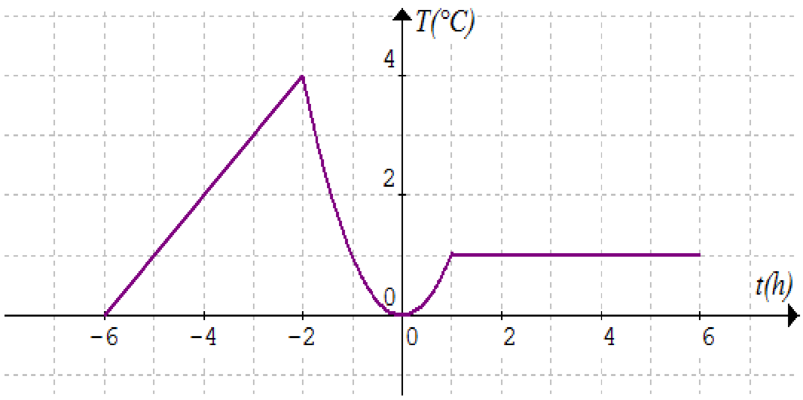
Por ejemplo, $(2\,;7)$ es el conjunto de todos los números reales entre 2 y 7 si lo representamos en la recta numérica:



Crecimiento y decrecimiento de funciones

Para evaluar la temperatura en cada tiempo t (en hs) de una cámara en donde se guardaron semillas de maíz se realizaron registros de la temperatura (en °C) de la misma en forma continua, desde las 6 de la tarde de un día y durante las primeras 6 hs del día siguiente.

Para resolver esta situación se puede considerar el gráfico de la función:



Para los registros de temperatura observamos cuatro situaciones bien diferentes en la evolución de la temperatura a medida que transcurre el tiempo:

- Hasta dos horas antes de la medianoche, es decir $-6 < t < -2$, la temperatura fue aumentando. ¿Cuál fue la máxima temperatura alcanzada?;
- Luego, y hasta la medianoche, $-2 < t < 0$, la temperatura fue disminuyendo. ¿Cuál fue la mínima temperatura alcanzada?;
- Entre la medianoche y la hora 1, es decir $0 < t < 1$, la temperatura volvió a aumentar, hasta llegar a los 1°C;
- A partir de la hora 1 y hasta finalizar la observación, es decir $1 < t < 6$, se registró una temperatura constante. ¿De cuántos grados fue esa temperatura constante?

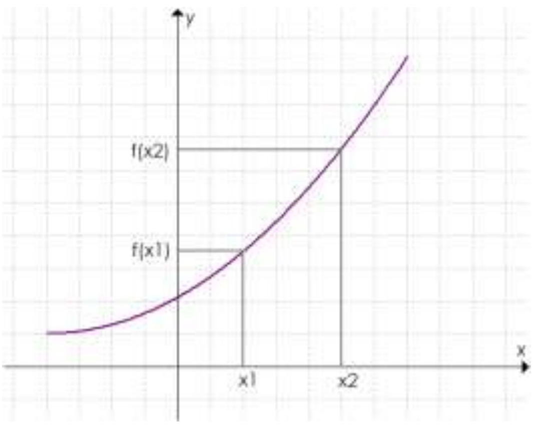
Las anteriores observaciones se traducen en lenguaje matemático de la siguiente forma:

- para $t \in (-6,-2)$, la función es **creciente**,
- para $t \in (-2,0)$, la función es **decreciente**,
- para $t \in (0,1)$, la función es **creciente**,
- para $t \in (1,6)$, la función es **constante**.

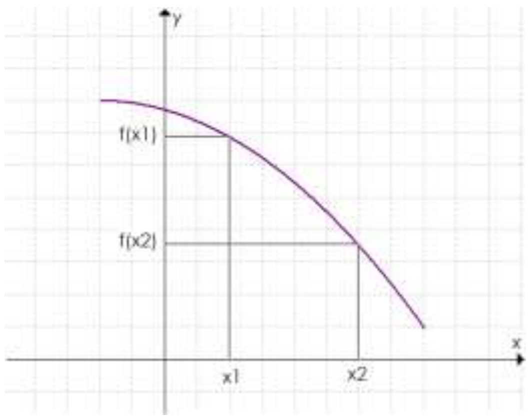
Definición:

- ✓ Una función f se dice **constante** en un intervalo $I \subseteq Dom(f)$ si $\forall\ x \in I$ es $f(x) = c$ donde c es un número real.
- ✓ Una función f se dice **creciente** en un intervalo $I \subseteq Dom(f)$ si $\forall\ x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$.
- ✓ Una función f se dice **decreciente** en un intervalo $I \subseteq Dom(f)$ si $\forall\ x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.

Gráficamente:



función creciente



función decreciente

Ejemplos:

Siempre son creciente las funciones que describen situaciones como:

- La altura de una planta a medida que transcurren los días posteriores a la siembra;
- El monto de una inversión, colocada a interés compuesto en un banco, a medida que transcurre el tiempo;
- El perímetro de una circunferencia como función de la medida de su radio.

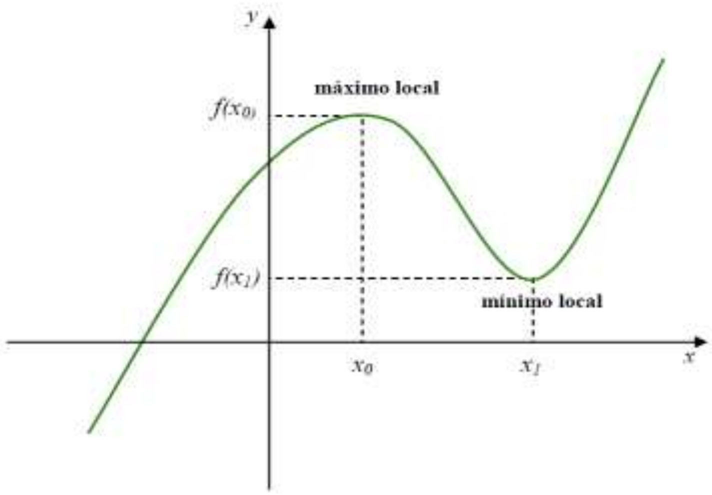
Siempre son decreciente las funciones que describen situaciones como:

- El interés que debe pagarse por un crédito amortizado según el sistema francés, a medida que transcurre el tiempo.
- El esfuerzo que debe realizarse para levantar un peso mediante el uso de una palanca cada vez que se amplía un brazo de la misma.

Máximos y mínimos locales (o relativos)

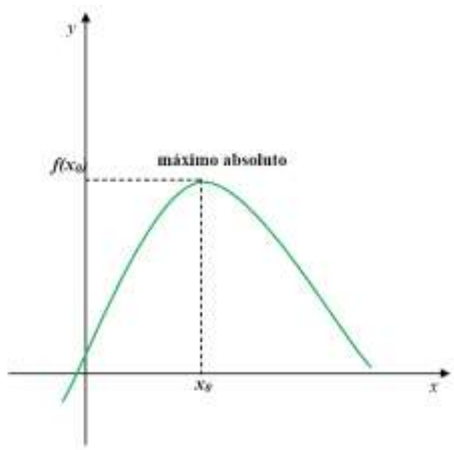
- 🕮 ***f*** alcanza un **máximo local** en x_0 si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos "próximos" a x_0, es decir, si $f(x_0) \geq f(x)$ para los valores de x "cercanos a x_0"
- 🕮 ***f*** alcanza un **mínimo local** en x_1 si $f(x_1)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos "próximos" a x_1, es decir, si $f(x_1) \leq f(x)$ para los valores de x "cercanos a x_1".

Gráficamente:

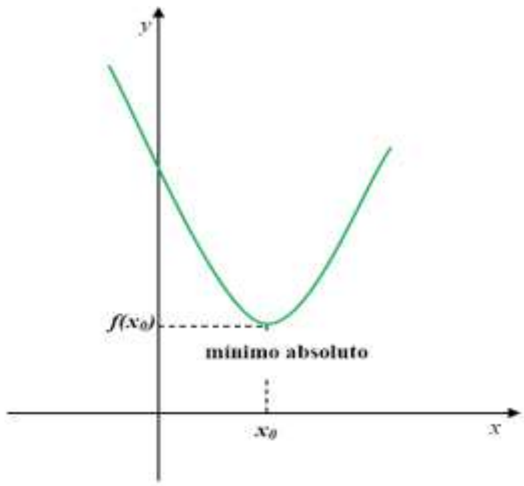


Máximos y mínimos absolutos

- 🕮 ***f*** alcanza un **máximo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio, es decir, si $f(x_0) \geq f(x)$ para cualquier x del dominio de *f*.

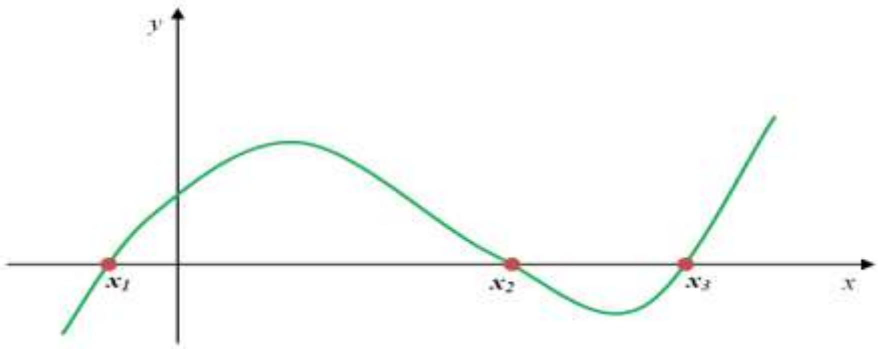


📖 ***f*** alcanza un **mínimo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio, es decir, si $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier x del dominio de f.



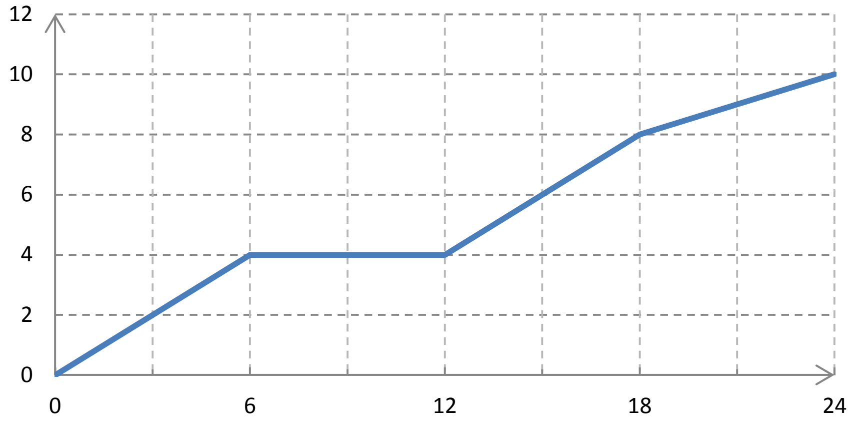
Ceros o raíces

📖 $x_0 \in Dom(f)$ es raíz de f si y solamente si $f(x_0) = 0$



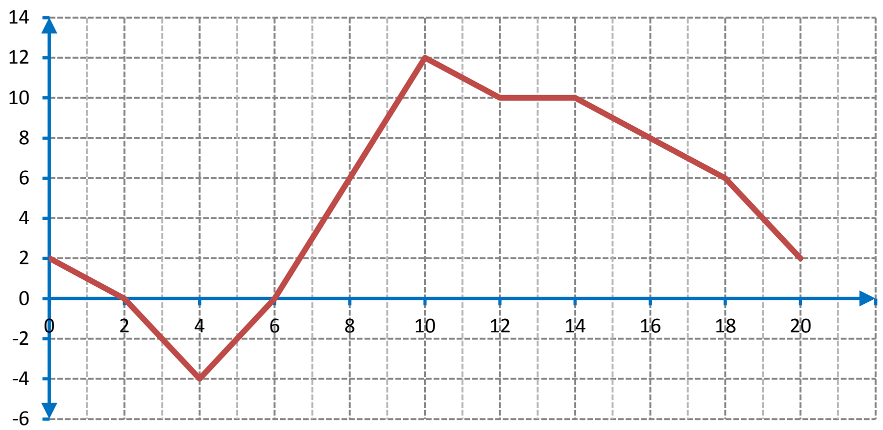
Trabajo Práctico De Funciones

1) Carolina y Sabrina trabajan en la misma empresa. Carolina tiene auto y suele pasar a buscar a Sabrina para ir juntas a trabajar. Observen el gráfico que muestra cómo varía la distancia recorrida por Carolina desde que sale a su casa hasta que llega a la empresa, y contesten a las preguntas.



a) ¿Qué variable se mide en cada eje de coordenadas?
b) ¿Cuánto tarda en llegar a la casa de Sabrina?
c) ¿A qué distancia de la casa de Carolina se encuentra la casa de Sabrina?
d) ¿Cuánto tiempo la espera?
e) En que parte del trayecto van más rápido porque utilizan la autopista. ¿Qué parte de la gráfica es la que corresponde a ese tramo?
f) ¿A qué distancia se encuentra la empresa de la casa de Sabrina?

2) El siguiente gráfico refleja el relevamiento de datos obtenidos en el centro meteorológico de la ciudad de Cipolletti, hora a hora, desde las 0 a las 20 hs de un día.



Si llamamos *f* a la función que relaciona las variables involucradas en el problema. Responder:

a) ¿Qué variables se tuvieron en cuenta para confeccionar el gráfico de *f*? (Identificar variable independiente y variable dependiente).

b) ¿Cuál es el dominio de f? ¿Cuál es la imagen?

c) ¿Cuál es el valor de $f(2)$? ¿y de $f(8)$?

d) ¿En qué horarios la temperatura fue de 10ºC?

e) ¿Cuáles son las temperaturas máxima y mínima y a qué hora se alcanzan esos valores?

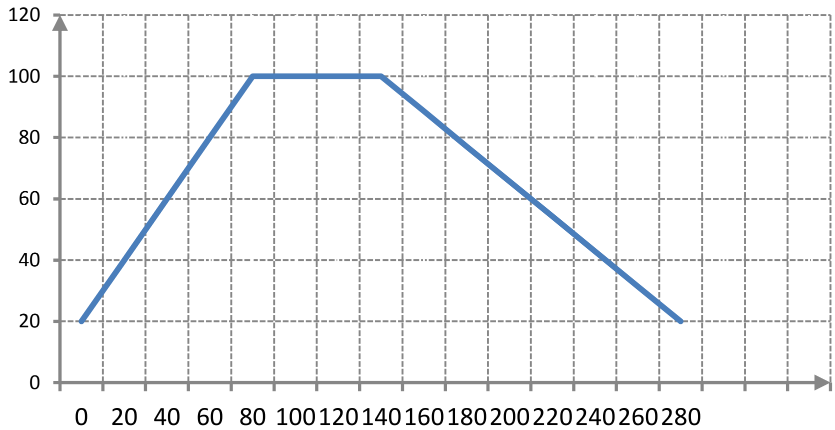
f) ¿Desde qué hora y hasta qué hora se produjo un aumento de la temperatura?

g) ¿En qué intervalos de tiempo se produjo un descenso de la temperatura?

h) ¿Qué ocurrió entre las 15 hs y las 17 hs?

i) ¿En qué mes te parece que pueden haber sido realizadas las mediciones?

3) Se ha calentado una olla con agua. Cuando empieza e hervir (a 100°C), se deja enfriar. Observar el gráfico y responder:



a) ¿Qué variables se han representado en los ejes?

b) ¿Qué representa cada unidad en el eje horizontal? ¿Y en el eje vertical?

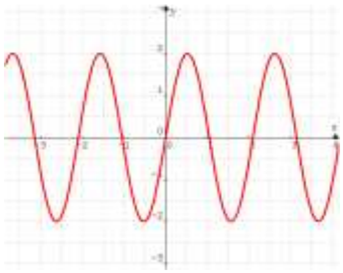
c) ¿Cuál era la temperatura inicial del agua?

d) ¿Cuánto tiempo permanece el agua a 100°C?

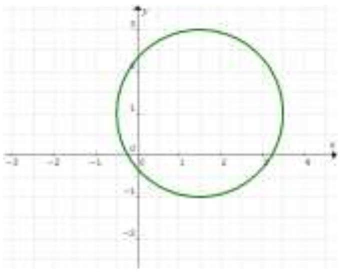
e) ¿Cuánto tiempo tarda en enfriarse hasta llegar a los a 20°C?

4) Indicar si los siguientes gráficos corresponden a funciones. Justificar las respuestas.

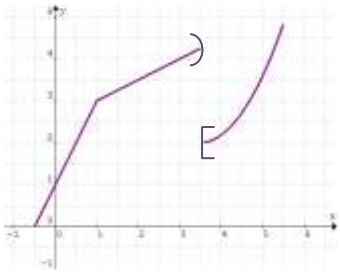
a)



b)



c)



5) Cada una de las siguientes tablas se corresponde con una de las fórmulas de la lista. Establecer esa correspondencia.

a)

x	0	1	2	3	4
y	1	4	13	28	49

b)

x	0	1	2	3	4
y	1	4	7	10	13

c)

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

i) $y = x + 1$

ii) $y = 3x + 1$

iii) $y = x^3 + 5$

iv) $y = x^3 + 1$

v) $y = 3x^2 + 1$

6) Si definimos la función a partir de la fórmula $g(r) = r + \frac{1}{r}$, determinar el valor de:

a) $g(1)$

b) b) $g(2)$

c) $g(-0{,}1)$

d) ¿Es posible encontrar $g(0)$? ¿Por qué?

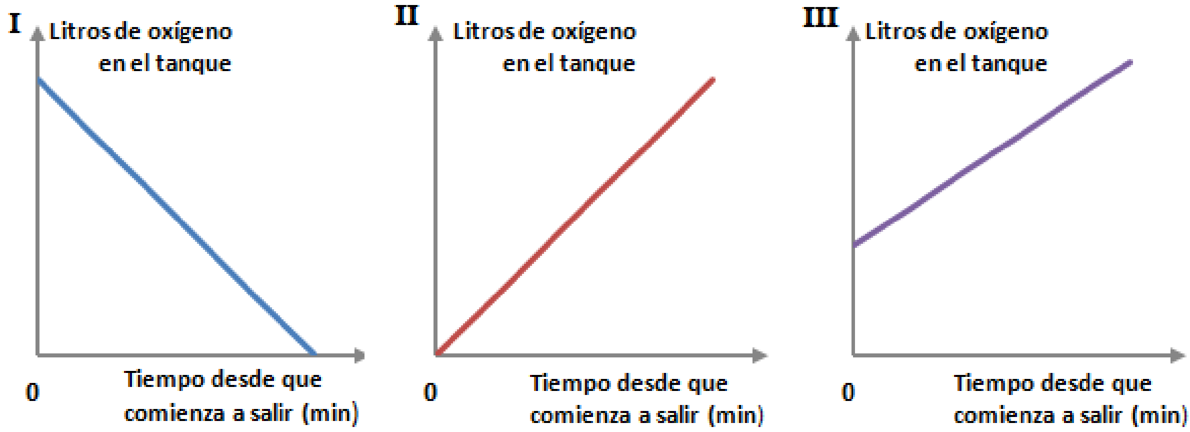
7) Indicar para cada una de las siguientes funciones cuál es su dominio. Calcular cuando sea posible $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ y $f(4)$.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(x) = 3x + 4$ $\quad f(x) = 2x + \sqrt{x}$ $\quad f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

$f(x) = \log(1-x)$ $\quad f(x) = (x+1)^2 + 2$ $\quad f(x) = -2$ $\quad f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

8) Un tubo de oxígeno de 682 litros de capacidad, que originalmente estaba lleno, se está vaciando a razón de10 litros por minuto.

a) ¿Cuál de estos gráficos podría representar la cantidad de oxígeno que queda en el tubo a medida que transcurre el tiempo? ¿Cómo te das cuenta?



b) ¿Qué podrías hacer para saber cuánto tiempo pasará hasta que el tubo tenga la mitad del contenido original?

Función Lineal

En lo realizado hasta ahora han tenido oportunidad de apreciar gráficos de forma diversa así como diferentes fórmulas que definen a las funciones. Los matemáticos han clasificado a las funciones de acuerdo a dichas fórmulas; veamos ahora un tipo particular de estas funciones que son muy "populares" y ya han aparecido en actividades anteriores:

¿En qué se parecen las fórmulas de las siguientes funciones?

a) $f(x)=-3x+4$ b) $g(x)=0{,}5x-2$ c) $h(x)=x-\sqrt{2}$

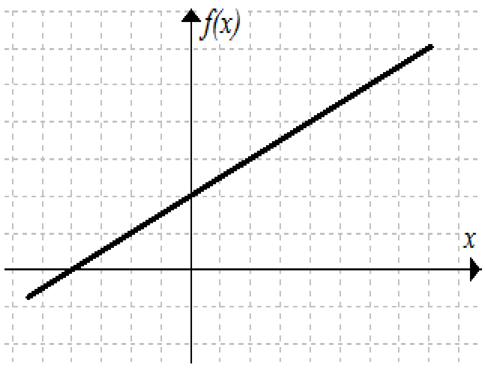
d) $i(x)=\frac{3}{4}x$ e) $j(x)=-x$ f) $k(x)=\frac{x}{2}+1{,}\hat{3}$

¿Cuál es el dominio de estas funciones?

Podemos observar que todas ellas responden a la forma: $f(x)=ax+b$

Definición: Llamamos función lineal a toda función cuya expresión sea de la forma:

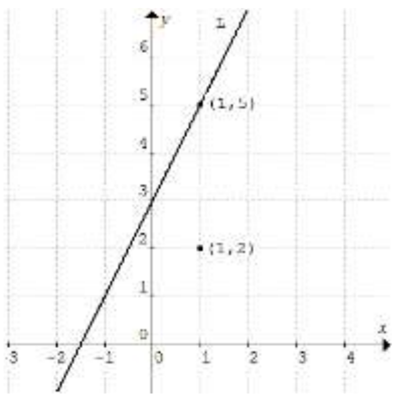
$$f(x) = ax + b\ ,\ a \in \mathbb{R}\ , b \in \mathbb{R}.$$



- ✓ El **dominio** de estas funciones es $\mathbb{R}$, y su representación gráfica es una **recta**.
- ✓ a es la **pendiente**: representa cuánto varía $f(x)$ por cada unidad que aumenta x.

*b es la **ordenada al origen**: es la ordenada del punto en el que la gráfica de la función corta al eje y.*

Ejemplo: La gráfica de la función $f(x)=2x+3$ es la recta L.



Cada uno de los puntos de L tiene un par de coordenadas $(x;y)$ que verifican la ecuación $y=2x+3$.

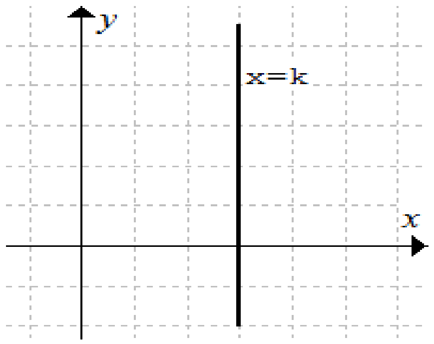
Decimos que esta expresión es una *ecuación de la recta* L.

Las coordenadas de cualquier punto que no pertenece a L no verifican esta igualdad. Por ejemplo:

$$P = (1;5) \in L \leftrightarrow 5 = 2 \cdot 1 + 3$$
$$Q = (1;2) \notin L \leftrightarrow 2 \neq 2 \cdot 1 + 3$$

Observación: Toda función lineal está asociada a una recta en el plano cartesiano y viceversa, **con excepción de las rectas perpendiculares al *eje x*, que no representan funciones.**

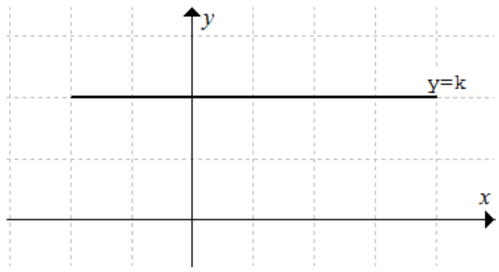
La representación gráfica de una recta vertical es:



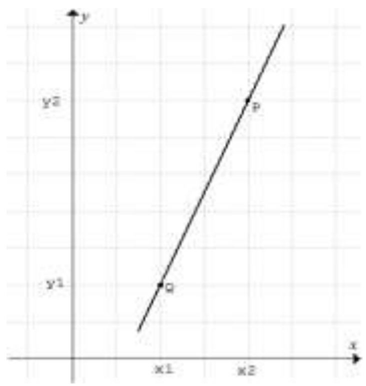
Su ecuación es $x = k$, $k \in \mathbb{R}$.

¿Qué condición de la definición de función no se cumple?

La ecuación de una recta *horizontal* es $y = k$, ($k \in \mathbb{R}$)



La *pendiente* de una recta es un número asociado a su inclinación.



Si conocemos las coordenadas de dos puntos de una recta, podemos calcular su pendiente mediante la siguiente fórmula:

$$\left.\begin{array}{r} P = (x_1; y_1) \\ Q = (x_2; y_2) \end{array}\right\} \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

📖 Si conocemos la pendiente a de una recta L y las coordenadas de uno de sus puntos, $P=(x_1;y_1)$, podemos hallar una ecuación de L de la siguiente manera:

$$y=a\left(x-x_1\right)+y_1$$

Ejemplo: Determinar la ecuación de la recta L tal que su pendiente es 2 y el punto $P=(-2\,;1)$ pertenece a ella.

Resolución: Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente y reconociendo la información dada, se tiene:

$$a=2 \text{ y } P=(x_1\,;\,y_1)=(-2\,;1)$$

Luego la ecuación de la recta L será:

$$y=a(x-x_1)+y_1$$
$$y=2(x-(-2))+1$$
$$y=2(x+2))+1=2x+4+1=2x+5$$
$$y=2x+5$$

📖 Dos rectas que tienen la misma pendiente son paralelas. (Fig. 1)
📖 Cuando el producto de las pendientes de dos rectas es -1, las rectas resultan perpendiculares. (Fig. 2)

Gráficamente esto se observa si se las representa en un sistema cartesiano utilizando **la misma escala en ambos ejes!**

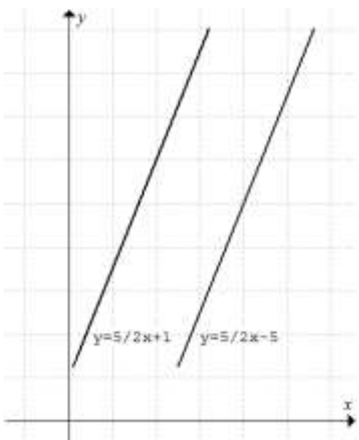


Fig 1

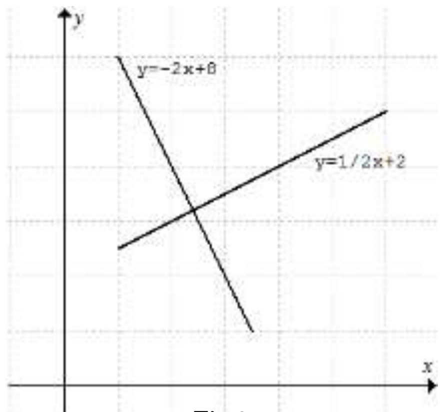


Fig 2

Aplicaciones de la función lineal a la economía

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación:

Una industria local elabora y vende dulce de manzana a \$15 el kg. El costo fijo es de \$12.000 y los costos variables son de \$5,50 por kg. La capacidad de la empresa permite elaborar como máximo 10.000 kg de dulce. Suponiendo que puede vender todo lo que produce, el fabricante quiere saber:

a) ¿Cuál es la función de ingresos totales?
b) ¿Cuál es la función de costos totales?
c) ¿Cuál es su función de utilidad mensual?
d) ¿Cuántos kg. debe producir y vender para no perder dinero?
e) ¿Qué sucede, si para un mes particular, decide vender 1.000 kg de dulce? ¿Y si decide vender 5.000 kg?

Respuesta:

a) Los ingresos están dados por la venta de bienes o por la prestación de servicios, y la forma más simple de calcularlos es haciendo el producto de la cantidad vendida por el precio de cada unidad.
En nuestro caso la función de ingreso total, que depende de la cantidad de kilogramos de dulce vendidos será:

$I(x) = 15x$ que también puede expresarse como $y = 15x$

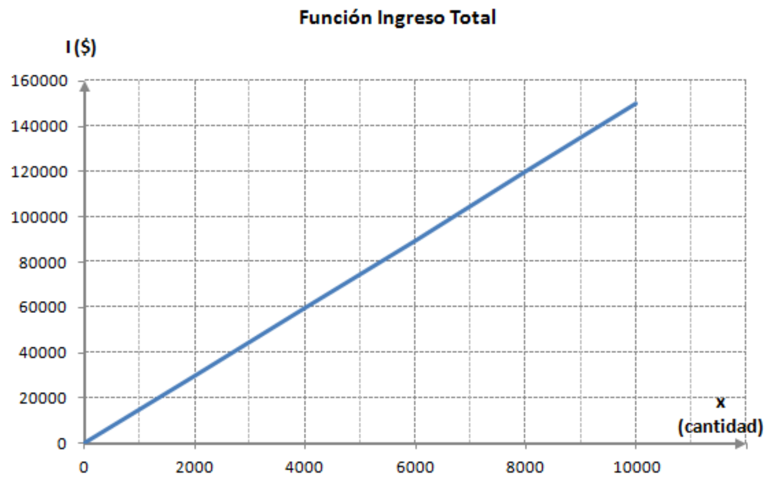
Se observa que es una función lineal. La ordenada al origen es nula, lo cual significa que si no se vende dulce, los ingresos son nulos.

Dado que existe una limitación en la producción, los valores que puede asumir la variable x (dominio de nuestra función) son: $Dom(I) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge \ 0 \leq x \leq 10.000\}$

Los ingresos del fabricante serán (imagen de nuestra función):

$$Im(I) = \{y \,/\, y \in \mathbb{R} \wedge \ 0 \leq y \leq 150.000\}$$

La gráfica de la función lineal será:



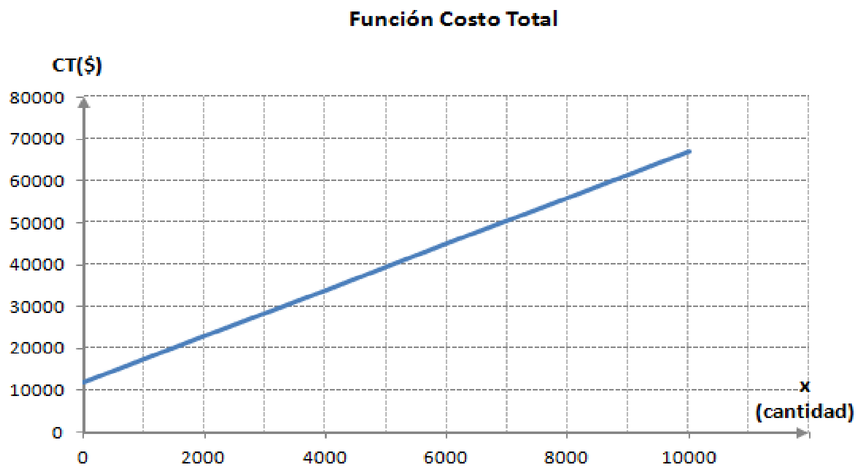
b) El costo total de la industria será la suma de los costos fijos que son \$12.000 y los costos variables de \$5,50 por cada kg. de dulce elaborado.

Luego la función de costo total para un mes será:

$$CT(x) = 12.000 + 5{,}5x \quad \text{o bien} \quad y = 12.000 + 5{,}5x$$

Esta función tiene pendiente positiva, lo cual significa que por cada unidad (kg de dulce) adicional de producto fabricado *(x)*, la función de costos *(y)* se incrementa en \$5,50; y la ordenada al origen positiva e igual a los costos fijos, determina que la función tiene como costo total mínimo la suma de \$12.000.

Su representación gráfica es:



El dominio y la imagen de la función de costos totales, será:

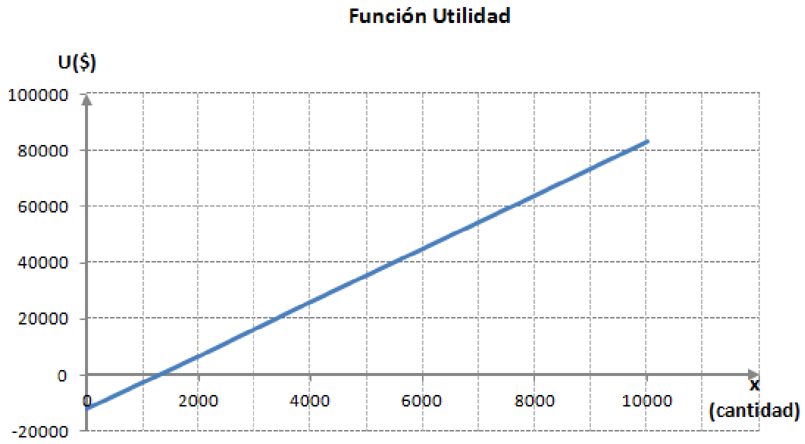
$$Dom(CT) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge \ 0 \leq x \leq 10.000\} \quad Im(CT) = \{y \,/\ y \in \mathbb{R} \wedge \ 12.000 \leq y \leq 67.000\}$$

c) Con las funciones de ingresos y costos totales ya definidas, podemos encontrar la función de beneficio de una empresa como la diferencia entre ingresos y costos totales, es decir: $U = I - CT$

Para nuestro ejemplo, la función de utilidad mensual, será:

$$U(x) = I(x) - CT(x)$$
$$U(x) = 15x - [12.000 + 5{,}5x]$$
$$U(x) = 9{,}5x - 12.000$$

Su representación gráfica es:



Si analizamos la ordenada al origen observamos que si la producción es cero, el beneficio es negativo, lo cual significa que el fabricante perderá $12.000, que corresponden a los costos fijos.

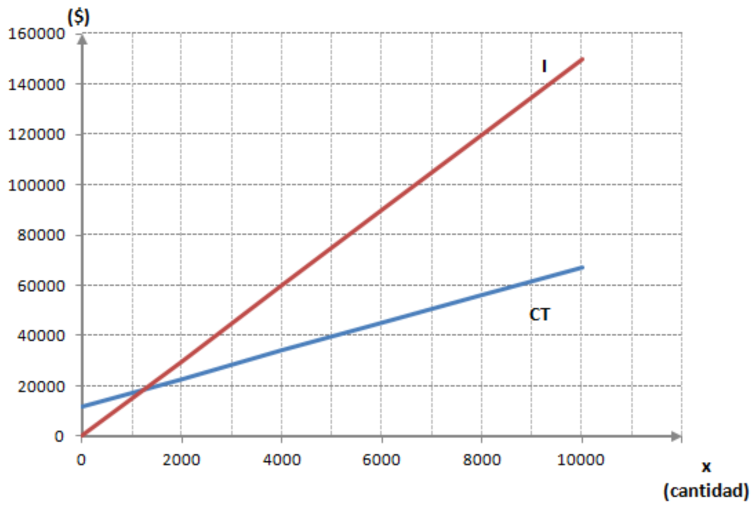
La pendiente positiva nos indica que, por cada kg adicional que se elabore y venda, la ganancia será de $9,50. Obviamente que para ganar se deberá producir lo necesario para cubrir tanto los costos fijos como los costos variables de elaboración.

El dominio y la imagen de la función de utilidad (mensual), será:

$$Dom(U) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge \ 0 \leq x \leq 10.000\}$$

$$Im(U) = \{y \,/\ y \in \mathbb{R} \wedge -12.000 \leq y \leq 83.000\}$$

d) Si graficamos las funciones de costo total y la de ingreso en un mismo sistema de ejes cartesianos, podemos observar:



Observamos que ambas funciones se cortan en un punto, es decir, que para un nivel determinado de x kg vendidos, los ingresos se igualan a los costos, es decir que el fabricante no gana, pero tampoco pierde, o sea, su utilidad es de $0.

Esto representa un **modelo de equilibrio**, el cual es una herramienta de planeación muy útil en la toma de decisiones de las organizaciones. En este caso, el análisis del punto de equilibrio se centra en la *rentabilidad* de una empresa. El punto de equilibrio representa el nivel de operación o de producción donde los ingresos totales son iguales a los costos totales.

Con las funciones de ingresos y costos totales, podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya resolución permite encontrar el punto de equilibrio:

$$\begin{cases} y = 15x \\ y = 12.000 + 5{,}5x \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (por igualación de variables):

$$\begin{aligned} 15x &= 12.000 + 5{,}5x \\ 15x - 5{,}5x &= 12.000 \\ 9{,}5x &= 12.000 \\ x &= 12.000 : 9{,}5 \\ x &= 1.263{,}16 \quad \Rightarrow \quad y = 18.947{,}37 \end{aligned}$$

El punto $(1.263{,}16\ ;\ 18.947{,}37)$ representa el punto de equilibrio.

e) Veamos qué sucede, si para un mes en particular, el fabricante debe producir y vender:

- 1.000 kg de dulce
- 5.000 kg de dulce

En el primer caso, como nos ubicamos a la izquierda del punto de equilibrio, los costos totales son superiores a los ingresos por lo cual la empresa trabajará con *pérdidas*.

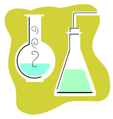
En el caso de producir 5.000 kg de dulce, nos encontraremos a la derecha del punto de equilibrio, con lo cual los ingresos serán superiores a los costos totales y así la empresa obtendrá *ganancias*.

Trabajo práctico de función lineal

1) Una sustancia se encuentra a 15°C, pero a partir del comienzo de un experimento su temperatura disminuye de manera uniforme a razón de 2° C por minuto.

   a) Completa la siguiente tabla con los valores de los minutos transcurridos y la temperatura de la sustancia:

Min.	0	2	4,5	7	8	10,5
Temp.						



   b) Realiza un gráfico en un sistema de ejes cartesianos utilizando los datos obtenidos en la tabla.

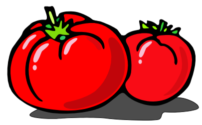
   c) ¿Cuál de estas fórmulas representan mejor la situación? (T representa la temperatura y M, los minutos transcurridos desde el comienzo del experimento).

   T = 2 M + 15 **T = - 2 M + 17** **T = - 2 M + 15** **T = 2 M + 17**

   d) ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que la sustancia alcance los 0° C?

2) En muchos supermercados los cajeros disponen de balanzas en las cuales se puede teclear el precio por kilo de la verdura que se pesa. Estas balanzas emiten un ticket donde se indica el precio total a pagar, correspondiente a la cantidad de verdura pesada. La siguiente tabla muestra distintas cantidades pesadas de tomate y los precios correspondientes registrados por la balanza.

Peso (g)	100	200	250	600
Precio total ($)	2,40	4,80	6,00	14,40

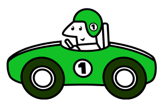


   a) Intenta deducir, utilizando la información de la tabla, cuánto cuesta 1 kg de tomate y 1,350 kg.

   b) Escribir una fórmula de la forma $f(x) = a.x + b$ que describa la situación e indicar cuáles son las variables relacionadas (variable dependiente y variable independiente).

   c) Calcular, utilizando la fórmula hallada, cuál es el precio de 5,213 kg de tomates.

3) Un auto se desplaza por una ruta a 25 metros por segundo. Para ingresar en la zona urbana comienza a frenar, disminuyendo la velocidad uniformemente a razón de 2 metros por segundo, por cada segundo que pasa.



   a) ¿A qué velocidad se desplazaba luego de 10 segundos de comenzar a frenar?

   b) ¿Cuánto tiempo pasa desde que comienza a frenar hasta que alcanza los 10 metros por segundos? ¿Y para que se detenga?

   c) Representar gráficamente la situación que se describe en el problema.

d) Escribir la fórmula que permita calcular la velocidad del auto en cualquier momento desde que comienza a frenar hasta que se detiene.

4) Un oficial gana \$ 30 por hora y su ayudante, \$ 20 por hora. Un día, el ayudante empieza a trabajar a las 8 de la mañana y el oficial a las 10.

a) ¿Cuánto dinero lleva ganado cada uno a las 10 y a las 11 de la mañana?

b) El oficial y su ayudante siguen trabajando hasta las 15 horas. Construir tablas que establezcan la cantidad de dinero que gana cada uno en función del tiempo que trabaja.

c) Representar en un mismo gráfico las dos funciones e indicar la fórmula de cada una.

d) ¿A qué hora han ganado la misma cantidad de dinero? (utilizar las gráficas para deducirlo y luego verificar que el resultado es correcto).

5) Si la ecuación de una recta es $y = \frac{2}{3}x + 1$:

a) Indicar al menos tres puntos que pertenezcan a la recta.

b) Indicar al menos tres puntos que no pertenezcan a la recta.

c) Verificarlo gráficamente (Graficar la recta y los puntos en un mismo gráfico).

6) a) Analizar si las siguientes tablas de valores corresponden a funciones lineales. Justificar su respuesta

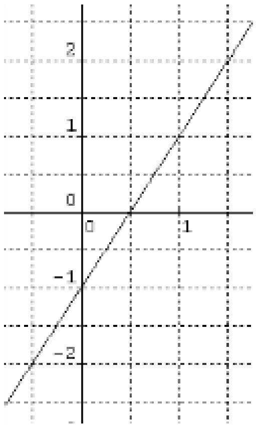
x	y
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1

x	y
-2	0
0	2
2	5
4	7

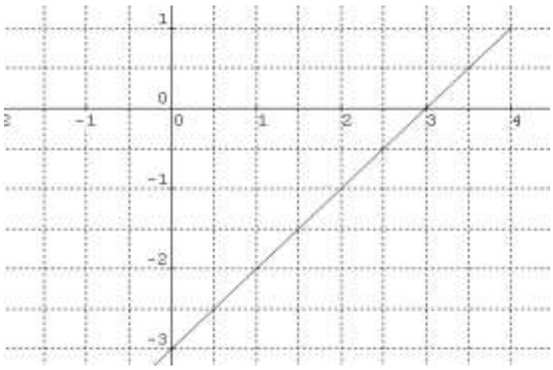
x	y
-2	-4
-1	-3,5
0	-3
3	-1,5

b) Para las tablas que correspondan a funciones lineales, hallar la fórmula y graficar las rectas correspondientes.

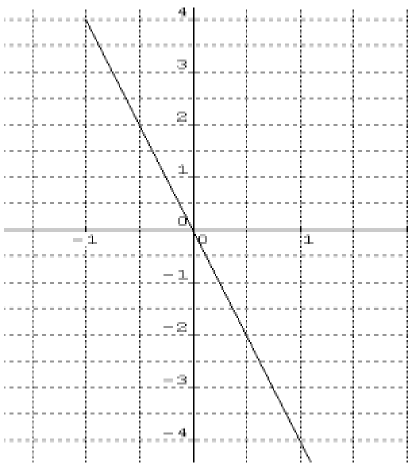
7) Resaltar la ecuación que corresponde a cada una de las siguientes funciones lineales:



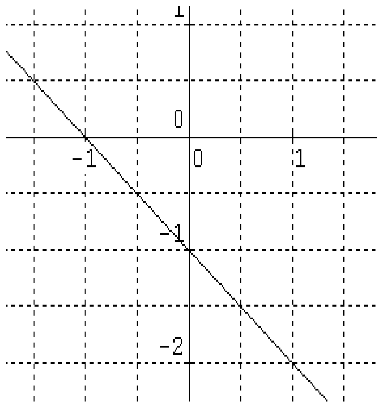
$y = 2\,x$
$y = 2\,x - 1$
$y = -2\,x - 1$



$y = x + 3$
$y = x - 3$
$y = 3\,x$



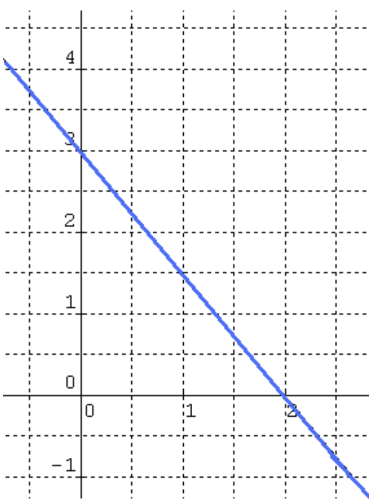
$y = 4\,x$
$y = \ -4\,x$
$y = \ -\,\frac{1}{4}\,x$



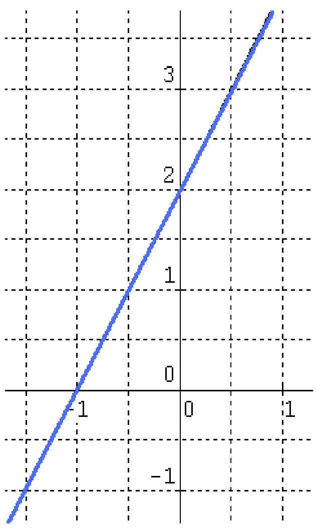
$y = \ -x + 1$
$y = x - 1$
$y = \ -x - 1$

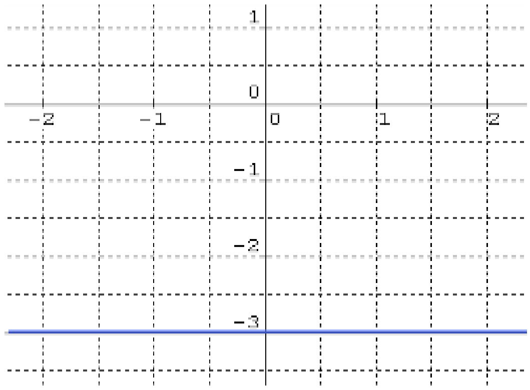
8) Escribir una fórmula para de cada una de las siguientes rectas:

a)



b)



c) 

9) Escribir verdadero o falso según corresponda en cada caso (// indica rectas paralelas y $\perp$ rectas perpendiculares). Justificar sin graficar. Verificar tu respuesta realizando los gráficos.

a) $y = 2\,x + 1 \;\; // \;\; y = 2$ b) $y = \frac{1}{3}\,x \;\perp\; y = -x + 1$ c) $y = 1 - x \;\perp y = -1 + x$

d) $y = 2 \;\; // \, y = -5$ e) $y = x - 1 \, // \;\; y = -x + 1$ f) $y = 3 \perp \; y = -\frac{1}{3}$

10) Hallar la ecuación y graficar las rectas que cumplen con los datos dados:

a) pasa por los puntos $(2 ; 5)$ y $(- 1 ; 0)$.

b) la pendiente es 3 y pasa por el punto $(- 2 ; -5)$.

c) es paralela a $y = 2\,x - 3$ y pasa por el punto $(8 ; 3)$.

d) es perpendicular a $y = 4\,x - 2$ y pasa por el punto $(3 ; -2)$.

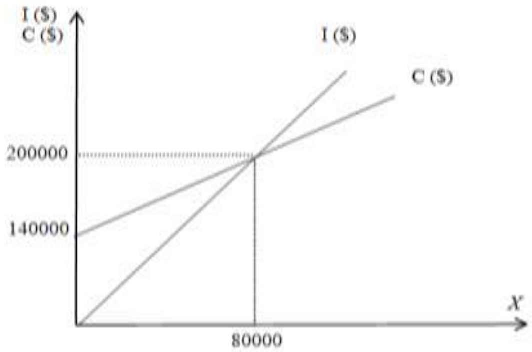
11) Graficar la recta $y = 0,5\,x - 3$. Hallar la ecuación de las rectas paralelas a la dada que cumplen, respectivamente, con las siguientes condiciones y graficarlas en un mismo par de ejes cartesianos:

a) Pasa por el punto $(- 2 ; 3)$.

b) corta al eje de las abscisas en $x = 1$.

c) corta al eje de las ordenadas en $y = -5$.

12) Dado el siguiente gráfico de ingresos y costos



a) Determinar la ecuación de costos totales y ventas

b) El punto (80000; 200000), qué representa?

13) Un fabricante de cierto producto "X" para llevar a cabo su emprendimiento maneja la siguiente información:
- -Costo proporcional unitario: $ 5
- -Costos estructurales del período: $ 15000
- -Precio unitario de venta: $ 9

Determinar:

a) Las funciones de ingreso y costo total.

b) El punto de equilibrio e interpretar.

c) Graficar ambas funciones.

d) El resultado del período si la producción y las ventas alcanzaron las 4000 unidades.

e) ¿Cuántas unidades deberá vender si desea tener una utilidad de $25000?

Bibliografía:

* Abdala, Carlos; Real, Mónica; Turano Claudio. Carpeta de matemática. Editorial Aique. 2003.
* Altman, Silvia - Comparatore, Claudia - Kurzrok, Liliana. “Matemática: Funciones 1”. Ed. Longseller, 2005.
* Altman, Silvia - Comparatore, Claudia - Kurzrok, Liliana. “Matemática: Funciones 2”. Ed. Longseller, 2005.
* Bocco, Mónica. “Funciones elementales para construir modelos matemáticos”. Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2010.
* Carnelli, Gustavo – Novembre, Andrea – Vilariño, Alejandra. “Función de gala”. Ed. El Hacedor, 1999.
* Colera, José- Gaztelu, Ignacio - de Guzmán, Miguel - Oliveira, María José. “Matemáticas 2”, Ed. Anaya, 1997.
* Colera, José - García, Juan Emilio - Gaztelu, Ignacio- de Guzmán, Miguel- Oliveira, María José. “Matemáticas 3”. Ed. Anaya, 1995.
* Colera, José- García, Juan Emilio - Gaztelu, Ignacio- de Guzmán, Miguel - Oliveira, María José. “Matemáticas 4”. Ed. Anaya, 1995
* De Guzmán, Miguel - Colera, José - Adela Salvador. “Bachillerato 2”. Ed. Anaya, 1987.
* De Guzmán, Miguel - Colera, José - Adela Salvador. “Bachillerato 3”. Ed. Anaya, 1988.
* Itzcovich, Horacio – Novembre, Andrea. “M1 matemática”. Ed. Tinta Fresca, 2006.
* Itzcovich, Horacio – Novembre, Andrea. “M2 matemática”. Ed. Tinta Fresca, 2006.
* Martínez, Miguel; Rodríguez, Margarita. Matemática. Editorial Mc Graw Hill. 2004.

Página de Internet:

* http://uncomat.uncoma.edu.ar/